LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 15.06.2004

8. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 22.06.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: In einem topologischen Raum $\underline{X}$ nennt man $A \subset X$ eine **Zerlegungsmenge** von X, falls A offen und abgeschlossen ist. Für $x \in X$ heißt

$$Q(x) := \bigcap \{A \in \mathcal{P}(X); x \in A, A \text{ Zerlegungsmenge von } X\}$$

die **Quasikomponente von** x. Zeigen Sie:

a) Für jedes $x \in X$ ist $Q(x)$ abgeschlossen in $\underline{X}$. $\boxed{1}$

b) $X = \bigcup_{x \in X} Q(x)$ und für $x, y \in X$ gilt entweder $Q(x) = Q(y)$ oder $Q(x) \cap Q(y) = \emptyset$. $\boxed{2}$

c) Für jedes $x \in X$ gilt $\mathcal{C}(x) \subset Q(x)$. $\boxed{2}$

d) $\mathcal{C}(x)$ ist genau dann offen, wenn $Q(x)$ offen ist. In diesem Fall gilt $\mathcal{C}(x) = Q(x)$. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, versehen mit der von $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{nat}})$ induzierten Relativtopologie, ist nicht zusammenhängend. $\boxed{2}$

b) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, versehen mit der von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{nat}})$ induzierten Relativtopologie, ist zusammenhängend. $\boxed{3}$

c) Die topologischen Räume $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{nat}})$ und $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{nat}}$ sind nicht homöomorph. $\boxed{3}$

Aufgabe 3:

a) Seien $(X, \mathcal{T})$, $(X, \mathcal{T}')$ zwei topologische Räume, $\mathcal{T}$ feiner als $\mathcal{T}'$ und $Y \subset X$. Zeigen Sie: Ist Y als Unterraum von $(X, \mathcal{T})$ zusammenhängend, so ist Y auch als Unterraum von $(X, \mathcal{T}')$ zusammenhängend. $\boxed{2}$

b) Zeigen Sie: Die natürliche Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ ist feiner als die Zariski–Topologie $\mathcal{T}_Z$ auf $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$. Folgern Sie:

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_Z)\ ,\ (\mathbb{C}^n, \mathcal{T}_Z)\ \text{ sind zusammenhängend.}$$ $\boxed{2}$

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen kurvenzusammenhängende Teilmengen von $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit der natürlichen Topologie sind:
   (i) $\mathrm{Pos}_n(\mathbb{R}) := \{P \in M_n(\mathbb{R})\ ;\ P > 0\}$ (positiv definite Matrizen),
   (ii) $SO_n(\mathbb{R}) := \{U \in M_n(\mathbb{R})\ ;\ UU^t = E,\ \det U = 1\}$ (spezielle orthogonale Gruppe),
   (iii) $\mathrm{Nil}_n(\mathbb{R})$ (nilpotente Matrizen). $\boxed{6}$

b) Wie sehen die Zusammenhangskomponenten der orthogonalen Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ aus? $\boxed{2}$

c) Zeigen Sie, dass die Gruppe $GL_n(\mathbb{C})$ der invertierbaren Matrizen über $\mathbb{C}$ eine offene, kurvenzusammenhängende Teilmenge von $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ mit der natürlichen Topologie ist. $\boxed{4}$

d) Bleibt die Aussage in c) richtig, wenn man $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt? $\boxed{1}$

Aufgabe 5: Sei $\mathbb{R}^2$ mit der natürlichen Topologie versehen und

$$A := \{(x, \sin \tfrac{2\pi}{x})\ ;\ x > 0\}.$$

a) Bestimmen Sie $\overline{A}$.

b) Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

c) Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ nicht kurvenzusammenhängend ist, und geben Sie die Anzahl der Kurvenzusammenhangskomponenten von $\overline{A}$ an. $\boxed{6}$

Aufgabe 6*: Sei $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologie versehen, U ein $(n-1)$–dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $H := a + U$. Bestimmen Sie die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \backslash H$.

Hinweis: Benutzen Sie die Hessesche Normalform von H. $\boxed{6}$