LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 22.06.2004

9. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 29.06.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ die Relation auf X, so dass für x, $y \in X$ die Relation $x \sim y$ genau dann besteht, wenn eine Kurve $f : [0,1] \to X$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ existiert. Zeigen Sie:

a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. $\boxed{2}$

b) Für $x \in X$ ist die Kurvenzusammenhangskomponente $W(x) := \{y \in X \; ; \; y \sim x\}$ die größte x enthaltende, kurvenzusammenhängende Teilmenge von X. $\boxed{2}$

c) $W(x) = C(x)$ für alle $x \in X$, falls jeder Punkt eine offene, kurvenzusammenhängende Umgebung besitzt. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Sei $\underline{X}$ ein topologischer Raum.

a) Es seien $a,b,c \in X$ und es gebe eine Kurve von a nach b und eine Kurve von b nach c. Zeigen Sie: Es existiert eine Kurve von a nach c und eine Kurve von b nach a. $\boxed{6}$

b) Zeigen Sie: Sind A,B kurvenzusammenhängende Teilmengen von X und ist $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cup B$ kurvenzusammenhängend. Genügt hierfür auch die schwächere Voraussetzung $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$? (Beweis oder Gegenbeispiel!) $\boxed{2}$

c) Zeigen Sie: Jede kurvenzusammenhängende Teilmenge Y von X liegt in einer maximalen kurvenzusammenhängenden Teilmenge. $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Gegeben sei der $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologie.

a) Zeigen Sie: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist jede Zusammenhangskomponente von U offen, und es gibt höchstens abzählbar unendlich viele solche Komponenten. $\boxed{2}$

b) Geben Sie eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit überabzählbar vielen Zusammenhangskomponenten an. $\boxed{2}$

Aufgabe 4*: Sei $\mathcal{T}_n$ die Zariski-Topologie auf $\mathbb{K}^n$, $K = \mathbb{R},\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) Jede Zariski-offene Menge $A \neq \emptyset$ ist dicht in der natürlichen Topologie auf K^n. $\boxed{3}$

b) $(K^n,\mathcal{T}_n)$ ist nicht Hausdorffsch. $\boxed{3}$