Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. F. Fehér

Aachen, den 24.4.2006

1. Übung zur Theorie der Rieszräume

Abgabe Mo. 8.5.2006

Aufgabe 1: Für eine teilweise geordnete Menge $(X, \leq)$ betrachte man die folgenden drei Aussagen:

1. $(X, \leq)$ ist Dedekind - vollständig.
2. Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge $Y \subset X$ besitzt ein Supremum in X.
3. Jede nicht-leere, nach oben beschränkte und nach oben gerichtete Teilmenge $Y \subset X$ besitzt ein Supremum in X.

Dabei heißt $Y \subset X$ *nach oben gerichtet*

$$\Leftrightarrow \forall f, g \in Y \quad \exists h \in Y : (f \leq h \quad \& \quad g \leq h).$$

Man zeige:

(a) die Äquivalenz von 1) und 2);

(b) die Äquivalenz von 1) und 3), falls $(X, \leq)$ ein Verband ist.

Aufgabe 2: Es seien $(X, \leq_X)$ und $(Y, \leq_Y)$ teilweise geordnete Mengen.

(a) Auf $X \times Y$ definiere man eine Relation $\preceq$ durch

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_X x_2 \quad \& \quad y_1 \leq_Y y_2$$

Man zeige: Wenn $(X, \leq_X)$ und $(Y, \leq_Y)$ Verbände sind, dann ist auch $(X \times Y, \preceq)$ ein Verband.

(b) Sei $X \cap Y = \emptyset$. Auf $X \cup Y$ definiere man eine Relation $\preceq$ durch

$$x \preceq y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in X & \textit{und} & x \leq_X y \\ & \textit{oder} & \\ x, y \in Y & \textit{und} & x \leq_Y y \\ & \textit{oder} & \\ x \in X & \textit{und} & y \in Y \end{cases}$$

Man zeige: Wenn $(X, \leq_X)$ und $(Y, \leq_Y)$ Verbände sind, dann ist auch $(X \cup Y, \preceq)$ ein Verband.

Aufgabe 3: Sei X ein topologischer Raum, der das Trennungsaxiom (T_0) erfüllt, d.h.

$$x \neq y \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{llll} \exists U \subset X & offen & mit & x \in U, y \notin U \quad oder \\ \exists V \subset X & offen & mit & x \notin V, y \in V \end{array} \right.$$

Auf X definiere man eine Relation durch

$$x \leq y \Leftrightarrow x \in \overline{\{y\}}.$$

Man beweise, dass diese Relation eine teilweise Ordnungsrelation ist.

Aufgabe 4: Ist $(X, \leq)$ eine teilweise geordnete Menge und $f \in X$, so bezeichnet man

$$\downarrow f = \{g \in X : g \leq f\}.$$

Man beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. $f \leq g$
2. $\downarrow f \subset \downarrow g$
3. Für jedes Ordnungsideal $Y \subset X$ gilt $g \in Y \Rightarrow f \in Y$.

Dabei heißt Y ein *Ordnungsideal* in X, wenn aus $f \in Y$, $g \in X$ und $g \leq f$ folgt $g \in Y$.

Aufgabe 5: Endliche teilweise geordnete Mengen $(X, \leq)$ kann man durch Diagramme darstellen: Den Elementen von X entsprechen Punkte des $\mathbb{R}_2$. Die $\leq$ - Relation wird definiert durch: $f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad f$ liegt unterhalb von g und es gibt eine Verbindungslinie von f nach g. Wie muß man das folgende Diagramm ergänzen, damit daraus ein Verband wird?