Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. F. Fehér

Aachen, den 29.5.2006

4. Übung zur Theorie der Rieszräume

Abgabe Mo. 12.6.2006

Aufgabe 1: Seien $(L;+,\cdot,\leq)$, $(M;+,\cdot,\leq)$ Rieszräume und $T : L \longrightarrow M$ ein surjektiver Rieszhomomorphismus. Man zeige:

a) Ist U ein Ideal in L, so ist $T(U)$ ein Ideal in M.

b) Sind U, V Ideale in L, so gilt: $T(U \cap V) = T(U) \cap T(V)$.

Aufgabe 2: Man beweise: Die konvexe Hülle einer soliden Teilmenge eines Rieszraumes ist solid.
Erläuterung: Eine Teilmenge A eines Rieszraumes L heißt "solid", wenn für alle $f, g \in L$ gilt:

$$f \in A \;\&\; |g| \leq |f| \Longrightarrow g \in A.$$

Aufgabe 3: Es sei L ein Rieszraum, $U \subset L$ ein Ideal in L und

$$[f] := \{g \in L : g - f \in U\} \qquad (f \in L)$$

die Äquivalenzklasse von f. Für die auf der Menge L/U durch

$$[f] \preceq [g] :\Leftrightarrow \exists\, f_1 \in [f] \quad \exists\, g_1 \in [g] \;:\; f_1 \leq g_1$$

erklärte Relation $\preceq$ zeige man:

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $[f] \preceq [g]$
(2) $\forall f_2 \in [f] \quad \exists\, g_2 \in [g] : f_2 \leq g_2$
(3) $\forall f_0 \in [f] \quad \forall g_0 \in [g] \quad \exists\, h \in U : h \leq g_0 - f_0$

b) $\preceq$ ist eine teilweise Ordnung auf L/U.

c) $(L/U, +, \cdot, \preceq)$ erfüllt die Rieszraumaxiome $(R_1), (R_2), (R_3)$.

Aufgabe 4: Auf einem Rieszraum L sei eine Topologie $\mathcal{T}$ so erklärt, dass $L(+, \cdot, \mathcal{T})$ ein linearer topologischer Raum ist und die Topologie mit der Ordnungsstruktur von L verträglich ist (d.h. L^+ ist abgeschlossen). Man beweise:

a) Für jedes $f_0 \in L$ sind die Mengen

$$\{f \in L : f \leq f_0\} \quad \textit{und} \quad \{f \in L : f \geq f_0\}$$

abgeschlossen.

b) $\mathcal{T}$ ist hausdorffsch.