Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. F. Fehér

Aachen, den 12.6.2006

5. Übung zur Theorie der Rieszräume

Abgabe Mo. 26.6.2006

Aufgabe 1: Sei $L = C[0,1]$ versehen mit der üblichen punktweisen Addition, Skalarmultiplikation und $\leq$-Relation. Bekanntlich ist dann L ein Rieszraum. Man finde

a) einen linearen Unterraum von L, der kein Rieszunterraum von L ist;

b) einen Rieszunterraum von L, der kein Ideal in L ist;

c) ein Ideal in L, das kein Band in L ist.

d) Man zeige, dass

$$U := \{f \in L : \forall x \in [0, 1/2] \ \ f(x) = 0\}$$

ein Band in L ist.

Aufgabe 2: Sei $(L; +, \cdot, \leq)$ ein Rieszraum und $U \subset L$ ein Ideal in L. Dann gilt: U ist ein Band in $L \iff \forall A \subset U^+$, $A \neq \emptyset$ [$sup\ A$ existiert in $L^+ \Rightarrow sup\ A \in U^+$].

Aufgabe 3: Es sei

$$L := M(\Omega, \mathbb{A}, \mu) := \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{A}, \mu)/U$$

wobei

$$U := \{f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{A}, \mu) : |f(x)| = 0 \quad \mu - f.\ddot{u}.\}.$$

a) Was bedeutet die Disjunktheit von zwei Elementen von L?

b) Sei $A \in \mathbb{A}$ und

$$U_A := \{[f] \in L : f(x) = 0 \quad f\ddot{u}r\ fast\ alle\ x \in A^c\}.$$

Man beweise, dass U_A ein Band in L ist.

Aufgabe 4: Seien L ein Rieszraum und $U \subset L$ ein Ideal in L. Man zeige:
U^{dd} ist das größte Ideal A in L mit der Eigenschaft:

$$\forall\, f \in A \setminus \{\Theta\} \quad \exists\, g \in U \setminus \{\Theta\} \quad \text{sodass} \quad |g| \leq |f|.$$

Aufgabe 5: Seien L ein Rieszraum und U, U_1, U_2, Ideale in L. Man beweise:

a) $U = U^{dd} \iff \exists\, A \subset L \quad \text{sodass} \quad U = A^d$;

b) $U_1 \perp U_2 \iff U_1 \cap U_2 = \{\Theta\}$;

c) $(U_1 \cap U_2)^{dd} = U_1^{dd} \cap U_2^{dd}$.

Tipp: Beim Beweis von c) verwende man Aufgabe 4.

Erläuterung zu Aufgaben 4 und 5: Zwei Elemente $f, g \in L$ heißen "disjunkt", wenn $|f| \wedge |g| = \Theta$. Ist $A \subset L$, so heißt die Menge $A^d := \{g \in L\ \forall f \in A\ g \text{ disjunkt zu } f\}$ das "disjunkte Komplement " von A. Schließlich bezeichnet $A^{dd} := (A^d)^d$.