LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
P. - M. Küpper

Aachen, den 16.10.2003

1. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Donnerstag, den 23.10.2003, vor der Übung)

Hinweis: Die in der Vorlesung ausgeteilten Übungsblätter sollen es Ihnen ermöglichen, den vorgestellten Stoff anhand von Aufgaben einzuüben. Die Bearbeitung der Aufgaben ist freiwillig, wird Ihnen aber sehr empfohlen. Falls Sie möchten, dass ihre Bearbeitungen korrigiert werden, geben Sie diese bitte zu Beginn der jeweils nächsten Übung ab. Sie erhalten Ihre korrigierten Bearbeitungen eine Woche später in der darauf folgenden Übung zurück. In der Übung werden dann Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (diese sind mit einem * gekennzeichnet) vorgestellt. Erster Übungstermin ist der 16.10.2003 von 12:00 bis 13:30 Uhr im Hörsaal **H 218**. Die Einteilung in die Diskussionsgruppen erfolgt ebenfalls an diesem Termin.

Einzige Bedingung zur Erlangung des Scheins ist das Bestehen der zweistündigen Klausur. Diese findet statt am Freitag, dem 30.01.04, ab 15:00 Uhr. Der genaue Termin wird noch bekannt gegeben.

Bei Fragen zu Vorlesung oder Übung sind wir per e-mail zu erreichen unter

stens@mathA.rwth-aachen.de

petra-maria.kuepper@mathA.rwth-aachen.de

Aktuelle Informationen und die Übungsblätter finden Sie auch unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/ws03/biologie/

Aufgabe 1: Stellen Sie die folgenden Mengen in der aufzählenden Form dar:

a) $\{x \in \mathbb{N}; x \leq 6\}$, b)* $\{x \in \mathbb{N}; x \text{ ist eine Primzahl mit } x \leq 35\}$,

c)* $\{x \in \mathbb{R}; x^4 - 2x^2 = 0\}$, d)* $\{x \in \mathbb{Q}; x^4 - 2x^2 = 0\}$,

e)* $\{x \in \mathbb{R}; x^2 = -4\}$.

Aufgabe 2: Bringen Sie die folgenden Mengen in eine aufsteigende (bzw. abfallende) Kette bezüglich der Teilmengenrelation.

a) A:=$\{1, 3, 5, 7, 9, 13\}$, B:= $\{x \in \mathbb{Z}; 2 \text{ teilt nicht } x\}$,

C:= Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen, D:= $\emptyset$.

b)* A:=$\{x \in \mathbb{Z}; x \leq 200 \text{ und } x \text{ ist durch 2 teilbar}\}$, B:= $\{x \in \mathbb{Z}; x \text{ ist gerade}\}$,

C:=$\{x \in \mathbb{Z}; x \leq 200 \text{ und } x \text{ ist durch 4 teilbar}\}$, D:=$\mathbb{N}$.

Aufgabe 3: Bilden Sie für die unter a) bzw. b) angegebenen Mengen:

$$A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C,\quad A \cup B,\ A \cup C,\ B \cup C,\quad A \cap B \cap C,\ A \cup B \cup C,$$

$$A \setminus B,\ B \setminus A,\quad A \setminus C,\ C \setminus A,\quad B \setminus C,\ C \setminus B,\quad (A \setminus B) \setminus C,\ A \setminus (B \setminus C).$$

Verifizieren Sie außerdem anhand dieser Mengen die Distributivgesetze

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ und $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

a)* $A := \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B := \{3, 6, 9, \ldots\}$, $C := \{6, 12, 18, \ldots\}$.

b) $A := \{3, 6, 9, \ldots\}$, $B := \{5, 10, 15, \ldots\}$, $C := \{15, 30, 45, \ldots\}$.

Aufgabe 4:* Gegeben seien die folgenden Teilmengen von $\mathbb{N}$:

$A :=$ Menge aller geraden natürlichen Zahlen.
$B :=$ Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen.
$C :=$ Menge aller Primzahlen.

Bestimmen Sie $A \cup B, A \cap B, A \cap C, A \setminus B, B \cap C, A \cup C, B \cup C$.

Aufgabe 5: Berechnen bzw. vereinfachen Sie folgende Terme und geben Sie, falls nötig, einschränkende Bedingungen an.

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}$, b)* $\dfrac{d}{\sqrt{d} \cdot \sqrt[3]{d^2}}$,

c) $\sqrt{\dfrac{(-4)^6 \cdot 9}{2^4 \cdot 4^2}}$, d)* $\sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$,

e)* $(a\sqrt{ax} - x\sqrt{ax}) : (\sqrt{a} - \sqrt{x})$, f) $\dfrac{(x^3)^2 x^5 y^{-3^2}}{(x^{-1})^{-6} x^2 (y)^{-2 \cdot 4}}$.

Definition: Für beliebige ganze Zahlen p, q definiert man:

$$\sum_{k=p}^{q} a_k := \begin{cases} 0, & \text{falls } q < p, \\ a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q, & \text{falls } q \geq p, \end{cases}$$

wobei die a_k irgendwelche Objekte (z.B. Zahlen, Vektoren, Funktionen, ...) sind.

Aufgabe 6: Berechnen Sie die folgenden Summen bzw. fassen Sie zu einer Summe zusammen.

a) (i)* $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} \frac{(j+1)(j+3)}{2j-1}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{4} \frac{n(n+1)}{2}$,

b) (i)* $1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + 625$, (ii)* $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 150$,

(iii)* $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 51$, (iv)* $3 + 2 + \frac{5}{3} + \frac{3}{2} + \frac{7}{5} + \frac{4}{3} + \frac{9}{7} + \frac{5}{4}$.

Hinweis zu (iv): Schreiben Sie alle Summanden als Brüche und erweitern sie diese geschickt.

Aufgabe 7 Vereinfachen Sie folgende Terme durch eine geschickte Indexverschiebung. Dabei ist eine Indexverschiebung eine Umbenennung der vorkommenden Indizes in der folgenden Art (alle vorkommenden Größen b_j seien wohldefiniert):

$$\sum_{j=k}^{l} b_j = \sum_{j=k-m}^{l-m} b_{j+m} \qquad (k, l, m \in \mathbb{Z}).$$

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} \frac{(n+2)(n+3)}{2} - \sum_{n=3}^{7} \frac{n(n+1)}{2}$, b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{3} \frac{n+1}{n+2} - \sum_{n=1}^{4} \frac{n}{n+1}$.