LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. R. Stens

P. - M. Küpper

Aachen, den 06.11.2003

4. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Donnerstag, den 13.11.2003, vor der Übung)

Aufgabe 1: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Richtigkeit der folgenden Aussagen für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1,$ b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)\binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2) - 1.$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks:

a)* $\binom{5}{3}$, b)* $\binom{7}{4}$, c) $\binom{6}{3}$, d) $\binom{4}{2}$.

Aufgabe 3: Die so genannte binomische Summenformel für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ lautet: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Multiplizieren Sie mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks die folgenden Terme aus:

a)* $(x+y)^4$, b) $(a+2)^5$, c)* $(1+b)^6$, d) $(a+b)^3$.

Aufgabe 4*: Zeigen Sie mit Hilfe der binomischen Summenformel (vgl. Aufgabe 3), dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Was bedeutet das für die Anzahl aller Teilmengen einer n-elementigen Menge?

Aufgabe 5: Eine homöopathische Mischung der Konzentration D_n (von lat. decem = zehn) wird wie folgt hergestellt:
Ein Teil einer Urtinktur D_0 wird mit neun Teilen Wasser gemischt; ein Teil dieser Mischung wird wieder mit neun Teilen Wasser gemischt usw., das ganze geschieht n-mal. So sind zum Beispiel Mischungen mit einer Konzentration von D_6 oder D_{12} üblich.

a) Wie hoch ist die Konzentration der Urtinktur in einer Mischung, deren Konzentration mit D_{12} angegeben wird?

b)* Wie hoch ist die Konzentration der Urtinktur in einer Mischung, deren Konzentration mit D_6 angegeben wird?

Aufgabe 6*: Die Bevölkerung eines Landes von $8,5 \cdot 10^7$ Menschen im Jahre 2003 nehme jährlich um 1% ab, da die Geburtenrate kleiner ist als die Sterberate. Zusätzlich wandern jedes Jahr ca. $2,5 \cdot 10^5$ Menschen in das Land ein. Wie viele Menschen werden voraussichtlich im Jahr 2020 in diesem Land leben?

Aufgabe 7: Es liege eine Kultur von anfänglich 10^6 Bakterien vor. Von diesen sterben ständig so viele, dass nach jeweils einem Tag nur noch ein Anteil von 0,7 der ursprünglichen Bakterien vorhanden ist. Um die Verluste auszugleichen, werden jeweils nach einem Tag b neue Bakterien hinzugefügt.

a)* Ermitteln Sie eine Formel für die Anzahl a_i von Bakterien der nach i vorhandenen Tagen (mit $i \in \mathbb{N}_0$).

b)* Wie muss man b wählen, damit die Anzahl der Bakterien nach zwei Wochen $5 \cdot 10^6$ beträgt?

c) Was verändert sich in der Formel, die in a) ermittelt wurde, wenn man davon ausgeht, dass am Anfang eine Kultur von a_0 Bakterien vorliegt?

d) Wie muss in der allgemeinen Formel b gewählt werden, damit die Anzahl der Bakterien nach einer Woche $k \cdot a_0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ beträgt?

Aufgabe 8: Der durchschnittliche Luftdruck in Meereshöhe beträgt $1013\, mbar$ (hPa). Mit der Höhe h nimmt der Luftdruck p_h ab; bei jeweils gleicher Höhendifferenz ergibt sich eine geometrische Folge. Bei einer Höhendifferenz von $1\, km$ gilt etwa $q = 0,882$.

a) Wie hoch ist der Luftdruck in $2\, km$ und $8\, km$ Meereshöhe?

b)* In ungefähr welcher Höhe beträgt der Luftdruck $175\, mbar$?

Korrektur zu Übung 3, Aufgabe 6b):

Die Aussage $A(n)$ ist falsch, richtig muss es heißen:

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = n(2n-1).$$