Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
P. - M. Küpper

Aachen, den 04.12.2003

8. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Donnerstag, den 11.12.2003, vor der Übung)

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit an der Stelle x_0:

a) $a(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,2\} \\ \frac{1}{4}, & \text{falls} \quad x \in \{-2,2\} \end{cases}, \; x_0 = 2,$

b)* $b(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1\} \\ 2, & \text{falls} \quad x \in \{-2,1\} \end{cases}, \; x_0 = 1,$

c)* $c(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-5}, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{5\} \\ 0, & \text{falls} \quad x = 5 \end{cases}, \; x_0 = 5,$

d) $d(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3}, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{-3,1\} \\ 1, & \text{falls} \quad x \in \{-3,1\} \end{cases}, \; x_0 = -3,$

e) $e(x) = \begin{cases} x^2+5, & \text{falls} \quad x \geq 2 \\ 4x+1, & \text{falls} \quad x < 2 \end{cases}, \; x_0 = 2,$

f)* $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-1}{5-x}, & \text{falls} \quad x \leq 0 \\ \frac{2x}{x^2+1}, & \text{falls} \quad x > 0 \end{cases}, \; x_0 = 0.$

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit!

a) $f(x) = \frac{x^2+6}{x^3-6x^2+11x-6}$, b)* $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x-10}$,

c)* $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^3+7x^2-4x-28}, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-7,-2,2\} \\ 0, & \text{falls} \quad x = -7 \\ 1, & \text{falls} \quad x = -2 \\ \frac{1}{9}, & \text{falls} \quad x = 2, \end{cases}$

d) $k(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & \text{falls} \quad x \leq 4, \; x \neq 2 \\ 3, & \text{falls} \quad x = 2 \\ x^2-3x+1, & \text{falls} \quad x > 4. \end{cases}$

Aufgabe 3: Begründen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die folgenden Funktionen eine Nullstelle im Intervall $[a, b]$ haben. Bestimmen Sie eine Approximation der Nullstelle, indem Sie das Intervall viermal halbieren!

a) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 3x - 10$, $a = 1$, $b = 2$,

b)* $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$, $a = -2$, $b = -1$.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig und monoton auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{D}(f)$ sind. Bestimmen Sie anschließend die zugehörige Umkehrfunktion.

a) $f(x) = -3x + 2,\ \mathbb{D}(f) = \mathbb{R}$,

b)* $g(x) = x^2 + 1,\ \mathbb{D}(g) = [0, \infty)$,

c) $h(x) = \dfrac{x-1}{x+5},\ \mathbb{D}(h) = [-4, \infty)$,

d)* $k(x) = \dfrac{x-2}{x-4},\ \mathbb{D}(k) = (-\infty, 3]$.

Aufgabe 5: Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit an der Stelle x_0!

a) $a(x) = |x - 1|,\ x_0 = 1$,

b)* $b(x) = |x^2 - 4|,\ x_0 = 2$,

c)* $c(x) = |x^2 + 5|,\ x_0 = 0$,

d) $d(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4x},\ x_0 = 4$,

e)* $e(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1},\ x_0 = 1$,

f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 2x - 8},\ x_0 = -1$.

Aufgabe 6: Berechnen Sie auf dem jeweiligen Definitionsbereich (dieser muss hier nicht explizit bestimmt werden!) die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $a(x) = -4x^4 + \dfrac{7}{3}x^3 - x^2 - \dfrac{5}{4}$,

b)* $b(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{5}} + 3}{x^2 - x^{-\frac{2}{3}} + 2}$,

c) $c(x) = \dfrac{x+3}{(2x^2+1)^3}$,

d)* $d(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{x^5}}{(2x^2 - 3x + 1)^2}$,

e)* $e(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$,

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x^2+2}}{x+2}$.

Korrektur zu Übung 7, Aufgabe 4a)*:

Im Nenner des Bruchs hat sich ein Vorzeichenfehler eingeschlichen, es sollte heißen:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}.$$