LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 13. Januar 2004

11. Übung zu Dynamische Systeme und Modellierung

Abgabe: Dienstag, den 20. 1. 2004, bis 16:30 Uhr im Kasten vor Raum HG 155

Aufgabe 32 (Ljapunov) Bearbeiten Sie diese Aufgabe ohne direkte Verwendung von (2.3.33), benützen Sie z.B. (2.3.28) und (2.3.30). Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ und $g : U \to \mathbb{R}^n$ mit

$$g(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0} \frac{g_i(x)}{||x||} = 0$$

für alle $1 \leq i \leq n$ gegeben. Dabei bezeichne $||x||$ die Euklidische Norm und $g_i(x)$ die i-te Komponente von $g(x)$.

a1) Zeigen Sie:

$$\lim_{x \to 0} \frac{L_g(\varphi)(x)}{\varphi(x)} = 0$$

a2) Es sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_r & -\beta_r \\ 0 & & & \beta_r & \alpha_r \end{pmatrix} \cdot x + g(x)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass 0 asymptotisch stabil ist, falls alle α_k negativ sind.

b) Es sei nun die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix} \cdot x =: Bx$$

gegeben. Zeigen Sie: Ist $\alpha < 0$, so gibt es eine quadratische Form ψ so, dass

$$L_B(\psi)(x) \leq \kappa \cdot \psi(x)$$

mit einem $\kappa < 0$ ist.

Aufgabe 33 (Einzugsgebiete) Es sei $\dot{x} = f(x)$ mit lokaler Lipschitzabbildung f auf $U \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, $z \in U$ eine stationärer Punkt und z asymptotisch stabil. Definiere das Einzugsgebiet $E(z) := \{x \in U : \omega(x) = \{z\}\}$.

a) Zeigen Sie, dass $E(z)$ offen ist.

b) Geben Sie entweder eine Gleichung $\dot{x} = f(x)$ mit lokaler Lipschitzabbildung f auf $\mathbb{R}^2$ an, die

(i) genau zwei stationäre Punkte z, w besitzt, welche asymptotisch stabil sind, so dass
(ii) für alle $x \in \mathbb{R}^2$ jeweils $\omega(x) = \{z\}$ oder $\omega(x) = \{w\}$ gilt,

oder zeigen Sie, dass es keine solche Gleichung geben kann.

Aufgabe 34 (Lorenz) Es seien σ, ρ und β positive Parameter. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1)\\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3\\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die stationären Punkte und deren Stabilität (Hurwitz) abhängig von den Parametern.

b) Seien nun $\sigma = 10$, $\rho = 28$ und $\beta = 8/3$. Zeichnen Sie die Lösungsbahnen für geeignete Startwerte und längere Zeit mit Maple. Der entsprechende Befehl heißt DEplot3d, Details finden Sie in der Maple-Hilfe (zur Not natürlich per Mail).