# Kapitel 1

## 1.1 Grundbegriffe aus der Funktionalanalysis

### 1.1.1 Normierte Vektorräume

**Definition 1.** a) Sei $X$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (linearer Raum, Linearsystem) über einem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Eine Abbildung $\|\cdot\|_X \colon X \to \mathbb{R}$ heißt eine *Norm* auf $X$, falls für alle $f, g \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$

(i) $\|f\|_X \geq 0$,

(ii) $\|f\|_X = 0 \iff f = 0$,

(iii) $\|\alpha f\|_X = |\alpha| \|f\|_X$,

(iv) $\|f + g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$ (Dreiecksungleichung).

b) Ist $X$ ein linearer Raum mit einer Norm $\|\cdot\|_X$, dann heißt $X$ oder genauer das Paar $(X, \|\cdot\|_X)$ ein *normierter Vektorraum* (NVR) oder *normierter linearer Raum* (NLR).

Statt $\|\cdot\|_X$ schreibt man häufig nur $\|\cdot\|$, wenn der zugehörige Raum aus dem Zusammenhang klar ist.

**Bemerkung 2.** a) Gilt anstelle von (ii) nur $f = 0 \implies \|f\|_X = 0$, dann spricht man von einer *Halbnorm* auf $X$.
b) Aus (iii) und (iv) folgt $\|f - g\| \leq \|f\| + \|g\|$ und $\big| \|f\| - \|g\| \big| \leq \|f \pm g\|$ für alle $f, g \in X$.

**Beispiele 3.** a) Sei

$$s \equiv s(\mathbb{Z}) := \{c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}; c_k \in \mathbb{C}\}$$

die Menge aller komplexwertigen Folgen auf $\mathbb{Z}$. Wir definieren für $1 \leq p < \infty$

$$l^p(\mathbb{Z}) \equiv l^p := \Big\{ c \in s(\mathbb{Z}); \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p < \infty \Big\},$$

$$\|c\|_{l^p} \equiv \|c\|_p := \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Außerdem seien

$$l^\infty(\mathbb{Z}) \equiv l^\infty := \big\{c \in s(\mathbb{Z}); \sup_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty\big\},$$

$$l_0^\infty(\mathbb{Z}) \equiv l_0^\infty \equiv c_0(\mathbb{Z}) \equiv c_0 := \big\{c \in l^\infty(\mathbb{Z}); \lim_{k\to\pm\infty} c_k = 0\big\},$$

$$\|c\|_{l^\infty} \equiv \|c\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|.$$

Die Räume $\big(l^p(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{l^p}\big)$, $1 \le p \le \infty$ und $\big(l_0^\infty(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{l^\infty}\big)$ sind normierte Vektorräume. Die Dreiecksungleichung ist in diesem Zusammenhang auch als Minkowski-Ungleichung bekannt. Entsprechend kann man $l^p(\mathbb{N})$ und $l_0^\infty(\mathbb{N})$ definieren.

b) Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $C[a,b]$ der lineare Raum aller stetigen Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, dann wird durch

$$\|f\|_{C[a,b]} \equiv \|f\|_C := \sup_{a\le x\le b} |f(x)| \equiv \max_{a\le x\le b} |f(x)|$$

eine Norm auf $C[a,b]$ definiert, die als Maximumsnorm, Supremumsnorm oder Tschebyscheff-Norm bezeichnet wird. $(C[a,b], \|\cdot\|_{C[a,b]})$ ist also ein normierter Vektorraum oder ein normierter linearer Raum.

c) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt $2\pi$-*periodisch*, falls $f(x+2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. $C_{2\pi}$ ist der lineare Raum aller stetigen, $2\pi$-periodischen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, auf dem durch

$$\|f\|_{C_{2\pi}} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

eine Norm definiert wird. Für diese Norm gilt

$$\|f\|_{C_{2\pi}} = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| = \max_{x\in[a,a+2\pi]} |f(x)|$$

mit beliebigem $a \in \mathbb{R}$. Man beachte, dass jedes $f \in C_{2\pi}$ gleichmäßig stetig und beschränkt auf $\mathbb{R}$ ist.

d) Ebenso werden die Vektorräume

$$UCB(\mathbb{R}^n) \equiv UCB := \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; f \text{ gleichmäßig stetig und beschränkt auf } \mathbb{R}^n\},$$

$$C_0(\mathbb{R}^n) \equiv C_0 := \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}; f \text{ stetig auf } \mathbb{R} \text{ und } \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$$

durch

$$\|f\|_{UCB} \equiv \|f\|_C := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$$

normiert. Es gilt $C_0 \subset UCB$, d. h. jede $C_0$-Funktion ist gleichmäßig stetig und beschränkt auf $\mathbb{R}^n$.

**Beispiele 4.** a) Für $1 \le p < \infty$ ist $\mathcal{L}_{2\pi}^p$ definiert als der Raum der Lebesgue-messbaren, $2\pi$-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, für die gilt:

$$\|f\|_{L_{2\pi}^p} \equiv \|f\|_p := \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

d. h. $|f|^p$ ist integrierbar über $[-\pi, \pi]$. Der Raum $\mathcal{L}^\infty_{2\pi}$ ist die Menge der messbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die *wesentlich beschränkt* sind, d. h. für die

$$\|f\|_{L^\infty_{2\pi}} \equiv \|f\|_\infty := \operatorname*{wes\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| := \inf\big\{M \in \mathbb{R}; |f(x)| \le M \text{ f. ü.}\big\}$$

endlich ist. $\|f\|_p$ ist für alle $1 \le p \le \infty$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p_{2\pi}$ im Sinne von Definition 1, wobei

$$\|f\|_p = 0 \iff f(x) = 0 \text{ f. ü.}$$

Wegen „f. ü." ist $\|f\|_p$ keine Norm auf $\mathcal{L}^p_{2\pi}$. Deshalb definiert man eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{L}^p_{2\pi}$ durch

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ f. ü.}$$

Sei $[f] := \{g \in \mathcal{L}^p_{2\pi}; f \sim g\}$ die Äquivalenzklasse von $f$, dann wird $L^p_{2\pi}$ als die Menge aller Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}^p_{2\pi}$ definiert. Da $\|f\|_p = \|g\|_p$ für alle $g \in [f]$, ist $\|\,[f]\,\|_p := \|f\|_p$ eine wohldefinierte Norm auf $L^p_{2\pi}$. Üblicherweise unterscheidet man dann nicht mehr zwischen Funktionen und deren Äquivalenzklassen, sondern schreibt $f \in L^p_{2\pi}$ statt $[f] \in L^p_{2\pi}$ und $\|f\|_p$ statt $\|\,[f]\,\|_p$.

b) Ebenso definiert man die Funktionenräume $L^p(\mathbb{R}^n) \equiv L^p$ für $1 \le p \le \infty$, ausgehend von den Lebesgue-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$\|f\|_{L^p} \equiv \|f\|_p := \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty} \equiv \|f\|_\infty := \operatorname*{wes\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty.$$

**Satz 5.** *Die Normen für die Räume $UCB$, $C_0$, $L^p_{2\pi}$ und $L^p(\mathbb{R}^n)$ sind translationsinvariant, d. h. für alle $h \in \mathbb{R}$ bzw. $h \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\|f(\,\cdot\,)\| = \|f(\,\cdot + h)\|.$$

**Definition 6.** Sei $X$ ein normierter linearer Raum.

a) Eine Folge $(f_n)_{n=0}^\infty \subset X$ heißt *konvergent* (in $X$), falls ein $f \in X$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

existiert. $f$ heißt dann der *Grenzwert* von $(f_n)_{n=0}^\infty$ und man schreibt $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.

b) Eine Folge $(f_n)_{n=0}^\infty \subset X$ heißt *Cauchy-Folge* (in $X$), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$) existiert, so dass $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m, n > N$ gilt.

c) $X$ heißt *vollständig* oder *Banach-Raum*, falls jede Cauchy-Folge in $X$ auch konvergent in $X$ ist.

**Bemerkung 7.** a) Für $f \in C[a, b], (f_n)_{n=0}^\infty \subset C[a, b]$ sind äquivalent:

(i) $(f_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen $f$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = 0$, d.h. $(f_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert in der $C[a, b]$-Norm gegen $f$.

Dasselbe gilt sinngemäß für die Räume $C_{2\pi}$, $UCB$ und $C_0$.

**Satz 8.** *Alle oben genannten Folgen- und Funktionenräume sind Banach-Räume.*

**Bemerkung 9.** Beispiele für unvollständige normierte Vektorräume sind $\mathbb{Q}$ mit der durch den Betrag definierten Norm oder $C[a,b]$ mit der Norm $\|f\| := \int_a^b |f(x)|\,dx$.

### 1.1.2 Lineare Operatoren

**Definition 10.** Seien $X, Y$ normierte Vektorräume über demselben Körper $\mathbb{K}$.

a) Eine Abbildung $T\colon X \to Y$ heißt *linearer Operator*, falls $T(\alpha f + \beta g) = \alpha Tf + \beta Tg$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $f, g \in X$ ist.

b) Ein linearer Operator $T : X \to Y$ heißt *beschränkt (auf $X$)*, falls eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\|Tf\|_Y \leq M\|f\|_X \quad (f \in X).$$

In diesem Fall setzt man

$$\|T\|_{[X,Y]} := \sup_{\substack{f\in X \\ f\neq 0}} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X} < \infty.$$

c) Die Menge aller beschränkten, linearen Operatoren von $X$ nach $Y$ bildet einen $\mathbb{K}$-Vektorraum, der mit $[X,Y]$ bezeichnet wird, und $\|T\|_{[X,Y]}$ ist eine Norm auf diesem Raum, d. h. $([X,Y], \|T\|_{[X,Y]})$ ist ein normierter Vektorraum. Statt $[X,X]$ schreibt man $[X]$.

**Satz 11.** *Für die Norm eines Operators $T \in [X,Y]$ gilt*

$$\|T\|_{[X,Y]} = \sup_{\|f\|_X=1} \|Tf\|_Y = \sup_{\|f\|_X\leq 1} \|Tf\|_Y = \sup_{\|f\|_X<1} \|Tf\|_Y$$

$$= \inf\{M \in \mathbb{R}; \|Tf\|_Y \leq M\|f\|_X \text{ für alle } f \in X\}.$$

**Satz 12.** *Ein Operator $T \in [X,Y]$ ist stetig auf $X$, d. h. ist $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $X$ und ist $f \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} Tf_n = Tf.$$

*Eine entsprechende Aussage gilt für Familien $(f_\rho)_{\rho\in I} \subset X$.*

### 1.1.3 Eigenschaften der $L^p$-Räume

**Satz 13 (Hölder-Ungleichung).** *Seien $1 \leq p \leq \infty$ und $1/p + 1/q = 1$ mit der Konvention $\frac{1}{\infty} = 0$. Ist $f \in L^p_{2\pi}$, $g \in L^q_{2\pi}$, dann ist $f \cdot g \in L^1_{2\pi}$ und*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

*Die entsprechende Aussage gilt für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$.*

**Bemerkung 14.** Für $p = q = 2$ ist die Hölder-Ungleichung auch als Cauchy-Schwarz-Ungleichung bekannt.

**Satz 15.** *Ist* $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$, *dann gilt* $C_{2\pi} \subset L^{p_2}_{2\pi} \subset L^{p_1}_{2\pi}$

$$\|f\|_{p_1} \le (2\pi)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \|f\|_{p_2} \quad (f \in L^{p_2}_{2\pi}), \qquad \|f\|_{p_1} \le (2\pi)^{\frac{1}{p_1}} \|f\|_{C_{2\pi}} \quad (f \in C_{2\pi}).$$

*Ist* $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$, *so gilt weder* $L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ *noch* $L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$, *aber es gilt für alle* $r \in [p_1, p_2]$

$$L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_2}(\mathbb{R}^n) \subset L^r(\mathbb{R}^n).$$

**Satz 16 (Stetigkeit im Mittel).** *Für* $f \in C_{2\pi}$ *oder* $f \in L^p_{2\pi}$, $1 \le p \le \infty$ *ist der Differenzenoperator* $\Delta_h f$ *definiert durch*

$$(\Delta_h f)(x) := f(x+h) - f(x) \quad (x, h \in \mathbb{R}).$$

*Analog ist der Differenzenoperator für* $f \in UCB$ *oder* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, *definiert durch*

$$(\Delta_h f)(x) := f(x+h) - f(x) \quad (x, h \in \mathbb{R}^n).$$

*Es gilt*

$$\lim_{h \to 0} \|\Delta_h f\|_{C_{2\pi}} = \lim_{h \to 0} \|\Delta_h f\|_{UCB} = 0$$

*und ebenso für* $1 \le p < \infty$, *aber nicht für* $p = \infty$,

$$\lim_{h \to 0} \|\Delta_h f\|_{L^p_{2\pi}} = \lim_{h \to 0} \|\Delta_h f\|_{L^p} = 0.$$

**Satz 17.** *Ist* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge in* $L^p$, $1 \le p < \infty$, *derart, dass* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ *für ein* $f \in L^p$, *dann existiert eine Teilfolge* $(f_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ *mit* $\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x) = f(x)$ *f. ü.*

**Satz 18 (Verallgemeinerte Minkowski-Ungleichung).** *Sei* $1 \le p \le \infty$, *seien* $(a,b) \subset \mathbb{R}^k$, $(c,d) \subset \mathbb{R}^n$ *ein k- bzw. n-dimensionales Rechteck, und sei* $f : (a,b) \times (c,d) \to \mathbb{C}$ *messbar. Ist* $\|f(\,\cdot\,, y)\|_{L^p(a,b)} \in L^1(c,d)$ *(als Funktion von y), dann existiert* $\int_{(c,d)} f(x,y)\,dy$ *für fast alle* $x \in (a,b)$, *ist messbar, und es gilt*

$$\Big\| \int_{(c,d)} f(\,\cdot\,, y)\,dy \Big\|_{L^p(a,b)} \le \int_{(c,d)} \|f(\,\cdot\,, y)\|_{L^p(a,b)}\,dy.$$