LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 24.10.2003

2. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 31.10.2003 <u>vor</u> der Übung)

Aufgabe 1: Zeigen Sie: Die Räume l^p, $1 \leq p \leq \infty$, und l_0^∞ sind Banach-Räume. $\boxed{7}$

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten des **Abel-Poisson-Kerns** (Abel: 1802–1829; Poisson: 1771–1840):

$$p_r(x) := \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \quad (0 \leq r < 1).$$

Hinweis: Zeigen Sie die Darstellung

$$p_r(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kx\,.$$

$\boxed{6}$

b) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von

$$q_r(x) := \frac{2r\sin x}{1-2r\cos x + r^2}\,.$$

$\boxed{3}$

c) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten von

$$f(x) := |x| \quad (-\pi \leq x < \pi),$$

und 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. $\boxed{5}$

Aufgabe 3: Man zeige, dass die endliche Fourier-Transformation <u>keine</u> Abbildung von $L^1_{2\pi}$ <u>auf</u> $l_0^\infty(\mathbb{Z})$ ist, d.h., es existiert ein $c \in l_0^\infty(\mathbb{Z})$ mit $c \neq (f^\wedge(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ für jedes $f \in L^1_{2\pi}$.
Hinweis: Man betrachte c mit $c_k = (\log k)^{-1}$, $k = 2, 3, \ldots$ und $c_k = 0$ sonst (vgl. Lit. C 4 (Hewitt), p.16; B III 3 (Rudin), p.104). $\boxed{8}$

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ (z.B.: $C = 3\sqrt{\pi}$) mit

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right\|_{C_{2\pi}} \leq C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Lit. C 2 (Natanson), p.88; C 6 (Timan), p.249). $\boxed{8}$

b) Mit a) schließe man: Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|\varphi_n(x)| \leq 2C,$$

wobei die **Fejér-Polynome** definiert sind durch

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) :=& \left(\frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos nx}{1} \right) \\ & - \left(\frac{\cos(n+2)x}{1} + \frac{\cos(n+3)x}{2} + \ldots + \frac{\cos(2n+1)x}{n} \right).\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

Aufgabe 5: Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Fejér-Kerns $F_m(x)$ aus Übung 1, Aufgabe 2b).

a) $(m+1)F_m(x) = \left| \sum_{k=0}^{m} e^{ikx} \right|^2.$ $\boxed{2}$

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $F_m(x) \leq m+1$ und

$$F_m(x) \leq \begin{cases} \pi^2 m, & |x| \leq 1/m \\ \frac{\pi^2}{(m+1)x^2}, & 1/m < |x| \leq \pi \end{cases}.$$

$\boxed{2}$

c) Setzt man $F_m^*(x) := \dfrac{2\pi^2 m}{1+m^2x^2}$, dann gilt

$$F_m(x) \leq F_m^*(x) \quad (\,|x| \leq \pi\,), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} F_m^*(x)\,dx \leq 2\pi^3 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

$\boxed{4}$

d) $\left| \sum_{k=-m}^{M} e^{ikx} \right| \leq \dfrac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \quad (\,x \neq 2\pi j,\ j \in \mathbb{Z},\ M \geq m\,).$

Hinweis: Man vergleiche die Aussage mit der Lösung zu Aufgabe 4a). $\boxed{3}$

$\boxed{\boxed{50}}$