Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 12.12.2003

9. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 19.12.2003 vor der Übung)

Aufgabe 1: Beweisen Sie Lemma 4.3 der Vorlesung. Zeigen Sie zudem die Umkehrfolgerungen der Aussagen iv) und vii), d.h., ist $f^\wedge$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ symmetrisch bzw. radial, dann ist f symmetrisch bzw. radial. Diskutieren Sie ebenfalls die Umkehrfolgerung der Aussage vi). $\boxed{14}$

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformierte des **(Gauß-)Weierstraß-Faktors** $\Theta^W(x) := e^{-x^2/4}$, $x \in \mathbb{R}^n$, gilt:

$$[\Theta^W]^\wedge(v) = 2^n \pi^{n/2} e^{-v^2} \quad (v \in \mathbb{R}^n)\,.$$

Hinweis: Ohne Beweis darf benutzt werden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. $\boxed{5}$

b) Der **Cesàro(-Fejér)-Faktor** (Cesàro: 1859–1906) ist für $t \in \mathbb{R}$ definiert als

$$\Theta^C(t) := \begin{cases} 1 - |t|\,, & |t| \le 1 \\ 0\,, & |t| > 1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie

$$[\Theta^C]^\wedge(s) = \begin{cases} 1\,, & s = 0 \\ \left[\dfrac{\sin s/2}{s/2}\right]^2, & s \neq 0 \end{cases}.$$

$\boxed{3}$

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(t) := \begin{cases} e^{-t}\,, & t > 0 \\ 0\,, & t \le 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})\,.$$

$\boxed{3}$

b) Zeigen Sie

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (e^{-u}/\sqrt{u}) e^{-\beta^2/4u}\,du \quad (\beta > 0)\,,$$

und benutzen Sie dies zur Berechnung der Fourier-Transformierten des **Cauchy-Poisson-Faktors** $\Theta^P(x) := e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dabei gilt (ohne Beweis)

$$(1)\ e^{-\beta} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{1+x^2}\,dx \quad (\beta > 0)\,,$$

$$(2)\ \frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)u}\,du\,,$$

$$(3)\ \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad (x > 0) \qquad \textbf{(Gamma-Funktion)}.$$

Hinweis: Lit. A II 7 (Stein-Weiss), p.6. $\boxed{12}$

Aufgabe 4: Sei $t_n(x) \in \Pi_n$ ein gerades trigonometrisches Polynom, d.h. $t_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ mit $c_k = c_{-k}$, $1 \le k \le n$. Sei weiter

$$\begin{aligned}\Delta^1 c_k := \Delta c_k &:= c_{k+1} - c_k,\\ \Delta^2 c_k := \Delta^1(\Delta^1 c_k) &= c_{k+2} - 2c_{k+1} + c_k.\end{aligned}$$

Sei D_n der Dirichlet- und F_n der Fejér-Kern. Zeigen Sie (für $f \in L^1_{2\pi}$):

a)

$$\begin{aligned}t_n(x) &= -\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta c_k)D_k(x) + c_n D_n(x)\,,\\ (f * t_n)(x) &= -\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta c_k)S_k(f;x) + c_n S_n(f;x)\,.\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

b)

$$\begin{aligned}t_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)(\Delta^2 c_k)F_k(x) - n(\Delta^1 c_{n-1})F_{n-1}(x) + c_n D_n(x)\,,\\ (f * t_n)(x) &= \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)(\Delta^2 c_k)\sigma_k(f;x) - n(\Delta^1 c_{n-1})\sigma_{n-1}(f;x) + c_n S_n(f;x)\,.\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

Definition: *Eine Folge $(c_k)_{k=0}^\infty$ von komplexen Zahlen heißt* **quasikonvex**, *wenn*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2 c_k| < \infty\,.$$

Aufgabe 5: Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ quasikonvex. Weiter gelte $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} k|\Delta c_k| = 0\,.$$

$\boxed{3}$

$\boxed{46}$