LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. E. Görlich,

Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 15. Oktober 2003

2. Skript zur Funktionalanalysis

Definition 8 Seien $\langle X, \rho_X \rangle$ und $\langle Y, \rho_Y \rangle$ zwei metrische Räume (identisch oder verschieden). $T : X \to Y$ heißt eine **Abbildung** (**Transformation**, **Operator**) **von** X **in** Y, falls durch $T(f) = Tf = g$ eine Vorschrift gegeben ist, die jedem $f \in X$ genau ein Element $g \in Y$ zuordnet. X heißt der **Definitionsbereich von** T, und g heißt der **Wert von** T **an der Stelle** f. Für $A \subset X$ heißt die Menge

$$T(A) = \{g \in Y;\ g = Tf,\ f \in A\}$$

das **Bild von** A **unter der Abbildung** T. Die Menge $T(X) \subset Y$ heißt der **Wertebereich von** T. Ist $B \subset Y$, so heißt

$$T^{-1}(B) = \{f \in X;\ Tf \in B\}$$

das **Urbild von** B **unter der Abbildung** T.

Definition 9 Seien $\langle X, \rho_X \rangle$ und $\langle Y, \rho_Y \rangle$ zwei metrische Räume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt eine **Abbildung von** X **auf** Y oder **surjektiv**, falls $T(X) = Y$ gilt, also zu jedem $g \in Y$ mindestens ein Element $f \in X$ existiert mit $Tf = g$. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt **eineindeutig** oder **injektiv**, falls für alle $f_1, f_2 \in X$ mit $f_1 \neq f_2$ stets $Tf_1 \neq Tf_2$ gilt, also aus $Tf_1 = Tf_2$ stets $f_1 = f_2$ folgt. Eine eineindeutige Abbildung von X auf Y heißt **bijektiv**.

Bemerkung: Man beachte den Unterschied zwischen einer Abbildung von X in Y und von X auf Y. Offensichtlich ist jede Abbildung auf Y auch eine Abbildung in Y, aber nicht umgekehrt.

Satz 4 *Seien $\langle X, \rho_X \rangle$ und $\langle Y, \rho_Y \rangle$ zwei metrische Räume und $T : X \to Y$ eine Abbildung. Weiter seien $A, A_1, A_2 \subset X$ und $B, B_1, B_2 \subset Y$ beliebig. Dann gilt:*

a) (i) *Aus $A_1 \subset A_2$ folgt $T(A_1) \subset T(A_2)$.*

(ii) *Es gilt $T(A_1 \cup A_2) = T(A_1) \cup T(A_2)$.*

(iii) *Es gilt $T(A_1 \cap A_2) \subset T(A_1) \cap T(A_2)$ (vgl. c)(iii)).*

(iv) *Es gilt $T(A_1 \setminus A_2) \supset T(A_1) \setminus T(A_2)$ (vgl. c)(iii)).*

(v) *Es gilt $T(A) = \emptyset$ genau dann, wenn $A = \emptyset$.*

(vi) *T ist surjektiv genau dann, wenn $T(\complement_X A) \supset \complement_Y(T(A))$ für alle $A \subset X$ gilt.*

b) (i) *Aus $B_1 \subset B_2$ folgt $T^{-1}(B_1) \subset T^{-1}(B_2)$.*

(ii) *Es gilt $T^{-1}(B_1 \cup B_2) = T^{-1}(B_1) \cup T^{-1}(B_2)$.*

(iii) *Es gilt $T^{-1}(B_1 \cap B_2) = T^{-1}(B_1) \cap T^{-1}(B_2)$.*

(iv) *Es gilt $T^{-1}(B_2 \setminus B_1) = T^{-1}(B_2) \setminus T^{-1}(B_1)$.*

(v) *Es gilt* $T^{-1}(\complement_Y B) = \complement_X(T^{-1}(B))$.

(vi) *Es gilt* $T^{-1}(B) = \emptyset$ *genau dann, wenn* $B \cap T(X) = \emptyset$.

c) (i) *Es gilt* $T(T^{-1}(B)) = B \cap T(X)$.

(ii) *Es gilt* $T^{-1}(T(A)) \supset A$ *(vgl. c)(iii)).*

(iii) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) T *ist injektiv.*

b) *Es gilt* $T^{-1}(T(A)) = A$ *für alle* $A \subset X$.

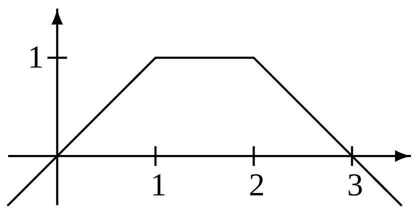
c) *Es gilt* $T(A_1 \cap A_2) = T(A_1) \cap T(A_2)$ *für alle* $A_1, A_2 \subset X$.

d) *Es gilt* $T(A_1 \setminus A_2) = T(A_1) \setminus T(A_2)$ *für alle* $A_1, A_2 \subset X$.

(iv) T *ist surjektiv genau dann, wenn* $T(T^{-1}(B)) = B$ *für alle* $B \subset Y$ *gilt.*

Bemerkung: In a)(iii) gilt i. A. nicht die Gleichheit! Man betrachte dazu $X = Y = \mathbb{R}$ mit $\rho_X = \rho_Y = \rho_{\text{nat}}$ und die Abbildung

$$Tf = \begin{cases} f, & -\infty < f \leq 1 \\ 1, & 1 < f \leq 2 \\ 3 - f, & 2 < f < \infty. \end{cases}$$



Setzt man jetzt $A_1 = [0,2]$ und $A_2 = [1,3]$, dann gilt $T(A_1) = T(A_2) = [0,1] = T(A_1) \cap T(A_2)$, $A_1 \cap A_2 = [1,2]$ sowie $T(A_1 \cap A_2) = \{1\}$. Also erhält man $T(A_1 \cap A_2) = \{1\} \subsetneqq [0,1] = T(A_1) \cap T(A_2)$.

Definition 10 Seien $\langle X, \rho_X \rangle$ und $\langle Y, \rho_Y \rangle$ zwei metrische Räume. Ist $T : X \to Y$ bijektiv, so ist die **Umkehrabbildung** T^{-1} definiert als die Abbildung $T^{-1} : Y \to X$, für die $T^{-1}(Tf) = f$ für alle $f \in X$ gilt.

Bemerkung: Offensichtlich stellt $T^{-1} : Y \to X$ eine Abbildung dar, da aufgrund der Surjektivität von T zu jedem $g \in Y$ mindestens ein $f \in X$ existiert mit $Tf = g$ und aufgrund der Injektivität von T zu jedem $g \in X$ höchstens ein $f \in X$ existiert mit $Tf = g$. Im Übrigen beachte man stets den Unterschied zwischen der Umkehrabbildung T^{-1} und dem Urbild $T^{-1}(B)$ einer Menge $B \subset Y$. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

(i) Es gilt $T(T^{-1}g) = g$ für alle $g \in Y$.

(ii) Ist $T : X \to Y$ bijektiv, dann ist $T^{-1} : Y \to X$ ebenfalls bijektiv, und es gilt $(T^{-1})^{-1} = T$.

Definition 11 Seien $\langle X, \rho_X \rangle$ und $\langle Y, \rho_Y \rangle$ zwei metrische Räume sowie $T : X \to Y$ eine Abbildung.

a) T heißt **stetig in** f_0 für $f_0 \in X$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, f_0) > 0$ existiert, so dass für alle $f \in X$ mit $\rho_X(f_0, f) < \delta$ stets $\rho_Y(Tf_0, Tf) < \varepsilon$ gilt.

b) T heißt **stetig auf** X, falls T in jedem Punkt von X stetig ist. T heißt **gleichmäßig stetig auf** X, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $f_1, f_2 \in X$ mit $\rho_X(f_1, f_2) < \delta$ stets $\rho_Y(Tf_1, Tf_2) < \varepsilon$ gilt.

Satz 5 *Sei $T : X \to Y$ eine Abbildung.*

a) Sei $f_0 \in X$ fest. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) T ist stetig in f_0.

(ii) Zu jeder offenen Umgebung V von Tf_0 in Y existiert eine offene Umgebung U von f_0 in X mit $T(U) \subset V$.

(iii) Ist V eine offene Umgebung von Tf_0 in Y, dann enthält $T^{-1}(V)$ stets eine offene Umgebung von f_0 in X.

(iv) Für jede Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f_0$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} Tf_k = Tf_0$ (Übertragungsprinzip).

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) T ist stetig auf X.

(ii) Für jede offene Menge B in Y ist $T^{-1}(B)$ offen in X.

(iii) Für jede abgeschlossene Menge B in Y ist $T^{-1}(B)$ abgeschlossen in X.

(iv) Für alle $A \subset X$ gilt $T(\overline{A}) \subset \overline{T(A)}$.

Definition 12 Seien $\langle X, \rho_X \rangle$ und $\langle Y, \rho_Y \rangle$ zwei metrische Räume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt **isometrisch** oder **Isometrie**, falls

$$\rho_X(f_1, f_2) = \rho_Y(Tf_1, Tf_2) \quad \text{für alle } f_1, f_2 \in X.$$

Die Räume X und Y heißen **isometrisch**, falls eine Isometrie von X auf Y existiert.

Bemerkung: Jede Isometrie $T : X \to Y$ ist injektiv. Gilt nämlich $T(f_1) = T(f_2)$ für zwei Elemente $f_1, f_2 \in X$, dann folgt $\rho_Y(Tf_1, Tf_2) = 0$ und somit $\rho_X(f_1, f_2) = 0$. Also ist $f_1 = f_2$ und damit T injektiv.

Definition 13 Seien $\langle X, \rho_X \rangle$ und $\langle Y, \rho_Y \rangle$ zwei metrische Räume. Eine bijektive Abbildung T von X auf Y heißt ein **Homöomorphismus**, falls T und T^{-1} beide stetig sind. Die Räume X und Y heißen **homöomorph**, falls ein Homöomorphismus von X auf Y existiert.

Offensichtlich ist mit T auch T^{-1} ein Homöomorphismus (von Y auf X). Außerdem ist jede surjektive Isometrie ein Homöomorphismus.

Definition 14 Seien $\langle X, \rho \rangle$ ein metrischer Raum und $A \subset X$. A heißt **dicht** in X, falls $\overline{A} = X$ gilt.

Bemerkung: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) A ist dicht in X.

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $f \in X$ existiert ein $g \in A$ mit $\rho(f, g) < \varepsilon$.

(iii) Jedes $f \in X$ ist Häufungspunkt von A oder gehört zu A (oder beides).