LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 19. Januar 2004

12. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Montag, 26. Januar 2004 vor der Übung

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Sei $K(x,y)$ eine auf dem Quader $(0,1)\times(0,1)$ Lebesgue–messbare Funktion mit

$$M := \operatorname*{ess\,sup}_{0<y<1} \int_0^1 |K(x,y)|\,dx < \infty.$$

Auf $L^1(0,1)$ werde ein Operator T definiert durch

$$T(f;x) := \int_0^1 f(t)K(x,t)\,dt \qquad \text{für alle } f\in L^1(0,1) \text{ und alle } x\in(0,1).$$

Zeigen Sie, dass $T\in[L^1(0,1)]$ mit $\|T\|_{[L^1(0,1)]} = M$.
Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis (vgl. Lemma von Fatou):

$$\int_0^1 |K(x,y)|\,dx \le \liminf_{n\to\infty} n\int_0^1 \left|\int_y^{y+1/n} K(x,t)\,dt\right|\,dx \qquad \text{f.ü. auf } (0,1).$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Seien X, Y zwei lineare normierte Räume über dem Körper $\Phi\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ und $T\in[X,Y]$. Zeigen Sie, dass durch

$$(T'f')(f) := f'(Tf) \qquad \text{für alle } f\in X \text{ und } f'\in Y'$$

ein Operator $T'\in[Y',X']$ mit $\|T'\|_{[Y',X']} = \|T\|_{[X,Y]}$ definiert wird. T' heißt der zu T **duale** Operator.

Aufgabe 3 ($1+4$ Punkte)

a) Seien X, Y zwei lineare normierte Räume über $\Phi\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, $T: X\to Y$ ein isometrischer Isomorphismus und $A\subset X$. Zeigen Sie, dass A genau dann fundamental in X ist, wenn $B := T(A)$ fundamental in Y ist.

b) Beweisen Sie Satz IV.6 b) der Vorlesung:
Sei $1<p<\infty$ und sei $(f^{(n)})_{n\ge1}$ eine Folge in l^p sowie $f^{(0)}\in l^p$. Dann gilt

$$\operatorname*{w-lim}_{n\to\infty} f^{(n)} = f^{(0)}$$

genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $(f^{(n)})_{n\ge1}$ ist beschränkt, d. h. es existiert ein $M>0$, so dass $\|f^{(n)}\|_{l^p}\le M$ für alle $n\in\mathbb{N}$,

(ii) $(f^{(n)})_{n\ge1}$ konvergiert koordinatenweise gegen $f^{(0)}$, d. h. $\lim_{n\to\infty} f_k^{(n)} = f_k^{(0)}$ für alle $k\in\mathbb{N}$.

Definition: Seien X, Y zwei lineare normierte Räume und $T : X \to Y$ ein linearer Operator. T heißt **kompakt** (oder vollstetig), falls für jede beschränkte Menge $B \subset X$ die Menge $\overline{T(B)}$ kompakt in Y ist. (Man sagt auch: $T(B)$ ist **relativ kompakt** oder **bedingt kompakt** in Y.)
Mit $K[X,Y]$ (bzw. $K[X]$) bezeichnen wir im Folgenden die Menge aller kompakten linearen Operatoren von X in Y (bzw. von X in sich).

Aufgabe 4 $(1+2$ Punkte)
Seien X, Y zwei lineare normierte Räume. Zeigen Sie:

a) Ist $T : X \to Y$ ein kompakter linearer Operator, dann ist T stetig.

b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung in a) i. A. nicht gilt. Betrachten Sie hierzu den Identitätsoperator auf einem unendlichdimensionalen linearen normierten Raum X.

   Hinweis: Beachten Sie die Musterlösung von Ü6, A5 c).

Aufgabe 5 (Zwei wichtige Charakterisierungen für kompakte Operatoren) $(2+1+2+5$ Punkte)
Seien X, Y zwei lineare normierte Räume. Zeigen Sie:

a) Sei $A \subset X$. Dann gilt:

   (i) A ist total beschränkt genau dann, wenn $\overline{A}$ total beschränkt ist.

   (ii) Ist X vollständig und A abgeschlossen, dann ist auch A vollständig.

b) Ist $T : X \to Y$ ein kompakter linearer Operator, dann ist für jede beschränkte Menge $B \subset X$ die Menge $T(B)$ total beschränkt. Falls Y vollständig ist, gilt auch die Umkehrung.

c) Ein linearer Operator $T : X \to Y$ ist genau dann kompakt, wenn für jede beschränkte Folge $(f_k)_{k\geq 1}$ in X die Folge $(T f_k)_{k\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge besitzt.