

11. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Donnerstag, den 13.1.2005, vor der Übung)

Aufgabe 1: Bestimmen Sie mit Hilfe der Approximationseigenschaft der Ableitung zunächst ohne Taschenrechner Näherungswerte für

$$e^{0.1}, \quad e^{0.01}, \quad e^{0.001}$$

und vergleichen Sie diese mit den Werten, die der Taschenrechner liefert.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie mit der Funktion f , $f(x) = x^3 - 2$, und dem Newton-Verfahren einen Näherungswert für $\sqrt[3]{2}$. Wählen Sie den Startwert $x_0 = 2$ und führen Sie das Verfahren so lange fort, bis sich der Wert der 4. Nachkommastelle nicht mehr ändert.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- a) $f' = 3 \cdot f - 4$;
- b) $f' = -f + 2$, $f(0) = 0$.

Aufgabe 4: Ein Medikament ist gleichmässig im Blutserum verteilt und wird über die Niere abgebaut, wobei die Abbaugeschwindigkeit proportional zur Menge des Medikaments ist.

a) Es ist aus Messungen bekannt, dass nach 3 Stunden noch der Anteil e^{-1} der ursprünglichen Menge des Medikaments vorhanden ist, wenn kein Medikament zugeführt wird. Stellen Sie damit eine Differentialgleichung für die Menge $m(t)$ des Medikaments im Blutserum auf (mit passend gewählten Einheiten).

b) Nun wird das Medikament intravenös zugeführt, mit einer konstanten Rate von 1 mg/min. Stellen Sie die Differentialgleichung für die Menge des Medikaments im Blutserum auf und lösen Sie diese. Welcher Grenzwert stellt sich für $t \rightarrow \infty$ ein?

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Lösung der Gleichung $e^x = 2$. Wählen Sie den Startwert $x_0 = 1$ und führen Sie das Verfahren so lange fort, bis sich der Wert der 4. Nachkommastelle nicht mehr ändert.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f' = -3 \cdot f + 4$, und ihre Grenzwerte für $x \rightarrow \infty$.

b) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen a mit der Eigenschaft, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g' = 3 \cdot g - 4$, $g(0) = a$ für $x \rightarrow \infty$ beschränkt ist.

Aufgabe 3: Ein Kontrastmittel für Röntgenaufnahmen gelangt über den Blutstrom in die Niere, wobei 10 mg/min zugeführt werden. Von der Niere wird das Mittel abgebaut mit einer Geschwindigkeit, die proportional zur vorhandenen Menge ist. Pro Stunde wird dabei die Hälfte abgebaut, wenn keine weitere Zufuhr erfolgt.

a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Menge $m(t)$ des Kontrastmittels in der Niere auf (mit passend gewählten Einheiten) und lösen Sie diese. (Verwenden Sie dabei die Lösung der ersten Präsenzaufgabe!)

b) Wie viel Kontrastmittel befindet sich nach 15 Minuten in der Niere, wenn zur Zeit $t = 0$ mit der Verabreichung begonnen wird?

Aufgabe 4: Die Moleküle eines Proteins werden zwischen Cytoplasma und Kern einer Zelle in beide Richtungen transportiert. Der relative Anteil $q(t)$ des Proteins im Kern ist durch die Differentialgleichung

$$\dot{q}(t) = -0.02 \cdot q(t) + b$$

mit geeignetem b charakterisiert, und aus Messungen ist bekannt, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0.8$. Bestimmen Sie die Konstante b .