Aufgabe: Sei $c \in \mathbb{C}$ und $f_c : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + \frac{c}{z}$. Untersuche f_c auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.
Lösung: (1a) f_0 ist nicht surjektiv: Wegen $f_0(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ hat 0 kein Urbild in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(1b) f_c ist für $c \neq 0$ surjektiv: Sei $w \in \mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist

$$f_c(z) = w \quad \Leftrightarrow \quad z + \frac{c}{z} = w \quad \overset{z\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad z^2 + c = wz \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - wz + c = 0.$$

Nach I(4.10) besitzt diese Gleichung eine Lösung für z in $\mathbb{C}$. Da für $z = 0$ stets $z^2 - wz + c = c \neq 0$ gilt, liegt die Lösung in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, also hat w ein Urbild in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Damit ist f_c surjektiv.
(2a) f_0 ist injektiv: Wegen $f_0(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist dies klar.
(2b) f_c ist für $c \neq 0$ nicht injektiv: Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$f_c(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z + \frac{c}{z} = 0 \quad \overset{z\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad z^2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = -c.$$

Nach I(4.10) hat diese Gleichung eine Lösung $z = z_0$ ($z_0 \neq 0$, da $0^2 = 0 \neq -c$). Dann ist auch $(-z_0)^2 = (-1)^2 z_0^2 = 1 \cdot (-c) = -c$, also hat man mit z_0 und $-z_0$ zwei verschiedene Urbilder von 0 gefunden. Daher ist f_c nicht surjektiv.
(3) Bijektivität: Aus dem bisher Gezeigten erhält man, dass f_c für kein $c \in \mathbb{C}$ bijektiv ist.

Aufgabe: Man untersuche jeweils $(a_n)_{n\geqslant 1}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n(n+1)}}{n}$, b) $a_n = \dfrac{(-1)^n n + 2}{n+1}$, c) $a_n = \sqrt{n^2 - n + 1} - n$,

d) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^n$.

Lösung: zu a) siehe Diskussionsstunde
zu b): Behauptung: $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist divergent. Beweis durch Widerspruch. Sei also angenommen, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist konvergent. Da $(\frac{2}{n+1})_{n\geqslant 1} = (\frac{2}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}})_{n\geqslant 1}$ nach den Limitenregeln (III(1.7)) und III(1.5) konvergiert, ist nach den Limitenregeln auch die Folge $(a_n - \frac{2}{n+1})_{n\geqslant 1}$ konvergent. Mit den Limitenregeln und III(1.5) folgt dann auch die Konvergenz der Folge $((1 + \frac{1}{n})(a_n - \frac{2}{n+1}))_{n\geqslant 1}$. Es gilt aber

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(a_n - \frac{2}{n+1}\right) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{(-1)^n n + 2}{n+1} - \frac{2}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right) \\ &= \frac{n+1}{n}\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right) = \frac{(-1)^n n}{n} = (-1)^n.\end{aligned}$$

Da $((-1)^n)_{n\geqslant 1}$ nach III(1.5) nicht konvergiert, hat man hier einen Widerspruch, so dass die Divergenz von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ folgt. [Bemerkung: Natürlich wurden auch hier die zu

betrachtenden Hilfsfolgen durch „Zurückrechnen" bestimmt, damit sich zuletzt genau $((-1)^n)_{n\geqslant 1}$ als divergente Folge ergibt.]
zu c): Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{n^2-n+1} - n &= \frac{(\sqrt{n^2-n+1}-n)(\sqrt{n^2-n+1}+n)}{\sqrt{n^2-n+1}+n} \\ &= \frac{n^2-n+1-n^2}{\sqrt{n^2-n+1}+n} = \frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} \end{aligned}$$

und damit

$$a_n = \frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} \overset{\substack{\sqrt{\cdot}\text{ monoton}\\ n\geqslant 1}}{\leqslant} \frac{-n+1}{\sqrt{n^2}+n} = \frac{-n+1}{2n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{\substack{\text{Limitenregeln}\\ \text{III(1.5)}}}{\longrightarrow}} -\frac{1}{2}$$

sowie

$$a_n \overset{\substack{\sqrt{\cdot}\text{ monoton}\\ n\geqslant 1}}{\geqslant} \frac{-n+1}{\sqrt{n^2-2n+1}+n} = \frac{-n+1}{n-1+n} = \frac{-n+1}{2n-1} = \frac{-1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{\substack{\text{Limitenregeln}\\ \text{III(1.5)}}}{\longrightarrow}} -\frac{1}{2}.$$

Mit dem Sandwich-Lemma (III(1.10)) folgt nun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$. [Bemerkung: Die „Beseitigung" einer Wurzel durch Erweitern zur dritten binomischen Formel gehört zu den Standardtricks.]
zu d): Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ gilt

$$0 \leqslant a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n \leqslant \left(\frac{n+\frac{n}{2}}{2n}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mit dem Sandwich-Lemma (III(1.10)) folgt nun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.