Marc Ensenbach Aachen, den 10. Dezember 2001

Übungen zur 1. Klausur zur Analysis I

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
(1) $A = \emptyset$
(2) Für alle Mengen B ist $A \setminus B = A \cap B$
(3) Es gibt eine Menge B mit $A \setminus B = A \cap B$

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Man zeige durch vollständige Induktion: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt und $-M := \{-x \mid x \in M\}$. Man zeige: $\sup(-M) = -\inf M$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Man zeige: $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn für alle Mengen Z und Abbildungen $g, h : Z \to X$ mit $f \circ g = f \circ h$ bereits $g = h$ folgt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Man zeige: $A := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, n \in \mathbb{N}_0, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q} : \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0, a_n \neq 0\}$ ist abzählbar.

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Man zeige: $f : H \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ mit $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ ist injektiv mit $f(H) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} =: K$.

Aufgabe 7 (2+2 Punkte)
Man zeige mit Hilfe der Definition:
a) $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$
b) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

Aufgabe 8 (2+1+2+2 Punkte)
Man bestimme die Grenzwerte folgender Folgen oder zeige ihre Divergenz:
a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$
b) $a_n = \sqrt[2n]{n}$
c) $a_n = \frac{(-3)^n + n}{3^n}$
d) $a_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^n}$

Aufgabe 9 (5 Punkte)
Man untersuche die durch $a_1 = 1$, $a_n = 1 + \frac{1}{a_n}$ rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Man bestimme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ mit $a_n = \dfrac{(-1)^n n + 1}{n} + (-1)^{\binom{n}{2}}$ und gebe eine Teilfolge von $(a_n)_n$ an, die gegen diesen Wert konvergiert.

Aufgabe 11 (4 Punkte)
Man untersuche $M = \{x + \sqrt{x} \mid x \in (0;1)\}$ auf Offenheit und Abgeschlossenheit.

Aufgabe 12 (1+1 Punkte)
a) Man gebe den Satz von Bolzano-Weierstrass in der Mengenversion an.
b) Man gebe die Definition eines isolierten Punktes an.