Marc Ensenbach Aachen, den 13. Dezember 2001

Lösungen zu den Übungen zur 1. Klausur zur Analysis I

Aufgabe 1
Diese Aussage wird durch einen Ringschluß gezeigt:
(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $A = \emptyset$, dann ist $A \setminus B = \emptyset \setminus B = \emptyset = \emptyset \cap B = A \cap B$ für jede Menge B.
(2) $\Rightarrow$ (3): klar.
(3) $\Rightarrow$ (1): Existiere eine Menge B mit $A \setminus B = A \cap B$. Sei $x \in A$.
1. Fall: $x \in B$: Dann gilt $x \in A \cap B = A \setminus B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$.
2. Fall: $x \notin B$: Dann gilt $x \in A \setminus B = A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$.
Damit kann ein $x \in A$ nicht existieren, womit $A = \emptyset$ ist.

Aufgabe 2
(IA) $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für dieses n.
(IS) Dann gilt $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{(IV)}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$ $1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$, was die Behauptung für $n+1$ ist.
Nach dem Induktionsprinzip gilt die Behauptung damit für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3
Setze $\alpha = \inf M$, was nach der Voraussetzung existiert.
(1) $-M$ ist durch $-\alpha$ nach oben beschränkt: Sei $y \in -M$, dann existiert ein $x \in M$ mit $y = -x$. Da α Infimum von M ist, gilt $x \geqslant \alpha$, also folgt $y = -x \leqslant -\alpha$.
(2) $-\alpha$ ist kleinste obere Schranke (also: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $y \in -M$ mit $-\alpha - \varepsilon < y \leqslant -\alpha$): Sei $\varepsilon > 0$. Da α Infimum von M ist, existiert ein $x \in M$ mit $\alpha \leqslant x < \alpha + \varepsilon$. Es folgt $-\alpha \geqslant -x > -\alpha - \varepsilon$. Da $-x \in -M$ ist, ist damit $\sup(-M) = -\alpha = -\inf M$ gezeigt.

Aufgabe 4
„$\Rightarrow$“: Sei f injektiv, Z eine Menge und $g, h : Z \to X$ mit $f \circ g = f \circ h$. Sei $z \in Z$, dann gilt $f(g(z)) = (f \circ g)(z) = (f \circ h)(z) = f(h(z))$ nach Voraussetzung. Da f injektiv ist, folgt $g(z) = h(z)$. Diese Aussage gilt für alle $z \in Z$, also ist $g = h$.
„$\Leftarrow$“: Sei für alle Mengen Z und Abbildungen $g, h : Z \to X$ mit $f \circ g = f \circ h$ bereits $g = h$. Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Wähle $Z = \{1\}$, $g(1) = x_1$ und $h(1) = x_2$, dann gilt $(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(g(1)) = f(x_1) = f(x_2) = f(h(1)) = f(h(z)) = (f \circ h)(z)$ für alle $z \in Z$, also gilt $f \circ g = f \circ h$ und nach Voraussetzung folgt $g = h$ und damit $x_1 = g(1) = h(1) = x_2$.

Aufgabe 5
Mit $N(p)$ für ein Polynom p sei im Folgenden die reelle Nullstellenmenge von p be-

zeichnet. Setze $\mathcal{P}_n = \left\{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \exists\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}, a_n \neq 0, p : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\}$ und $\mathcal{N}_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, p \in \mathcal{P}_n : x \in N(p)\}$. Jedem $p \in \mathcal{P}_n$ kann man nach dem Identitätssatz für Polynome eindeutig das Tupel $(a_0; a_1; \ldots; a_n)$ seiner Koeffizienten zuordnen. Diese Abbildung $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathbb{Q}^{n+1}$ ist injektiv. Da $\mathbb{Q}^{n+1}$ nach Vorlesung abzählbar ist, existiert eine injektive Abbildung $\psi : \mathbb{Q}^{n+1} \to \mathbb{N}$. Damit ist $\psi \circ \varphi : \mathcal{P}_n \to \mathbb{N}$ ist injektiv, womit $\mathcal{P}_n$ abzählbar ist. Da $N(p)$ für $p \in \mathcal{P}_n$ höchstens n Elemente enthält und damit abzählbar ist, ist $\mathcal{N}_n = \bigcup_{p \in \mathcal{P}_n} N(p)$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar. Wegen $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n$ ist damit auch A als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar.

Aufgabe 6

(1) f ist injektiv: Seien $z_1, z_2 \in H$ mit $f(z_1) = f(z_2)$. Dann gilt $\frac{z_1 - i}{z_1 + i} = \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \Leftrightarrow (z_1 - i)(z_2 + i) = (z_1 + i)(z_2 - i) \Leftrightarrow z_1 z_2 - iz_2 + iz_1 + 1 = z_1 z_2 + iz_2 - iz_1 + 1 \Leftrightarrow -iz_2 + iz_1 = iz_2 - iz_1 \Leftrightarrow -z_2 + z_1 = z_2 - z_1 \Leftrightarrow -(z_2 - z_1) = z_2 - z_1 \Leftrightarrow z_2 - z_1 = 0 \Leftrightarrow z_2 = z_1$.

(2) $f(H) \subset K$: Sei $z \in H$, also $\operatorname{Im} z > 0$. Sei $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt $z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy \Rightarrow \operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) > 0$. Damit erhält man $|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = \frac{z - i}{z + i}\overline{\left(\frac{z - i}{z + i}\right)} = \frac{z - i}{z + i}\frac{\overline{z} + i}{\overline{z} - i} = \frac{z\overline{z} - i\overline{z} + iz + 1}{z\overline{z} + i\overline{z} - iz + 1} = \frac{|z|^2 + i(z - \overline{z}) + 1}{|z|^2 - i(z - \overline{z}) + 1} = \frac{|z|^2 - \frac{1}{i}(z - \overline{z}) + 1}{|z|^2 + \frac{1}{i}(z - \overline{z}) + 1} = \frac{|z|^2 - 2\operatorname{Im} z + 1}{|z|^2 + 2\operatorname{Im} z + 1} < 1$, da der Zähler wegen $\operatorname{Im} z > 0$ kleiner als der Nenner ist. Damit ist $f(z) \in K$, also ist die Behauptung gezeigt.

(3) $K \subset f(H)$: Sei $w \in K$, also $|w| < 1$. Dann gilt $w = f(z) = \frac{z - i}{z + i} \Leftrightarrow wz + iw = z - i \Leftrightarrow iw + i = (1 - w)z \Leftrightarrow z = \frac{iw + i}{1 - w}$, da $|w| < 1$, also insbesondere $w \neq 1$. Nun gilt $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}\left(\frac{iw + i}{1 - w} - \frac{-i\overline{w} - i}{1 - \overline{w}}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{(iw + i)(1 - \overline{w}) - (-i\overline{w} - i)(1 - w)}{(1 - w)(1 - \overline{w})}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{iw - iw\overline{w} + i - i\overline{w} + i\overline{w} + i - iw\overline{w} - iw}{(1 - w)\overline{(1 - w)}}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{-2iw\overline{w} + 2i}{|1 - w|^2}\right) = \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2} > 0$, da $0 \leqslant |w| < 1$. Damit gibt es zu jedem $w \in K$ ein $z \in H$ mit $f(z) = w$. Aus (2) und (3) folgt $f(H) = K$.

Aufgabe 7

a) Polynomdivision liefert $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n - 1} = \frac{1}{3}n - \frac{2}{9} + \frac{16}{9(3n - 1)}$. Zu $M > 0$ wähle $n_0 = 3M + 3$, dann gilt für $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$: $a_n = \frac{1}{3}n - \frac{2}{9} + \frac{16}{9(3n - 1)} \geqslant \frac{1}{3}n - 1 \geqslant \frac{1}{3}n_0 - 1 = \frac{1}{3}(3M + 3) - 1 = M$, also ist $(a_n)_n$ bestimmt divergent gegen ∞.

b) Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 = \frac{1}{4\varepsilon}$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$: $|a_n - \frac{1}{2}| = |\sqrt{n^2 + n} - n - \frac{1}{2}| = \left|\frac{(\sqrt{n^2 + n} - (n + \frac{1}{2}))(\sqrt{n^2 + n} + (n + \frac{1}{2}))}{\sqrt{n^2 + n} + (n + \frac{1}{2})}\right| = \left|\frac{n^2 + n - (n + \frac{1}{2})^2}{\sqrt{n^2 + n} + n + \frac{1}{2}}\right| = \left|\frac{n^2 + n - n^2 - n - \frac{1}{4}}{\sqrt{n^2 + n} + n + \frac{1}{2}}\right| =$

$\dfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n}+n+\frac{1}{2}} \leqslant \dfrac{\frac{1}{4}}{n} \leqslant \dfrac{1}{4n_0} = \dfrac{1}{4\frac{1}{4\varepsilon}} = \varepsilon$. Damit ist die Aussage gezeigt.

Aufgabe 8

a) Es gilt $1 \leqslant a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)^n} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leqslant \sqrt[n]{e}$, da $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leqslant e$ nach III(2.7) und wegen der Monotonie der n-ten Wurzel. Wegen $\sqrt[n]{e} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ folgt $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ mit dem Sandwich-Lemma.

b) $\sqrt[2n]{n} = \sqrt[2n]{2n \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt[2n]{2n}\sqrt[2n]{\frac{1}{2}} \overset{\text{GWS}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 1 \cdot 1$, da Faktoren Teilfolgen von $(\sqrt[n]{n})_n$ und $(\sqrt[n]{\frac{1}{2}})_n$.

c) $a_{2n} = \dfrac{(-3)^{2n}+2n}{3^{2n}} = \dfrac{3^{2n}+2n}{3^{2n}} = 1 + \dfrac{2n}{3^{2n}} \overset{\text{GWS}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 1+0 = 1$. $a_{2n-1} = \dfrac{(-3)^{2n-1}+2n-1}{3^{2n-1}} = \dfrac{-3^{2n-1}+2n-1}{3^{2n-1}} = -1 + \dfrac{2n}{3^{2n-1}} - \dfrac{1}{3^{2n-1}} \overset{\text{GWS}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} -1+0-0 = -1$. Da a_n damit zwei verschiedene Häufungspunkte besitzt, ist $(a_n)_n$ divergent.

d) $a_n = \dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{\prod\limits_{k=n+1}^{2n} k}{\prod\limits_{k=1}^{n} k}\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}(n+k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \dfrac{n+1}{2}\prod\limits_{k=2}^{n}\underbrace{\dfrac{n+k}{2k}}_{\geqslant 1} \geqslant \dfrac{n+1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, also ist $(a_n)_n$ bestimmt divergent gegen ∞.

Aufgabe 9

(1) $(a_n)_n$ beschränkt: $\forall\, n \in \mathbb{N} : 1 \leqslant a_n \leqslant 2$: Beweis durch vollständige Induktion.
(IA) $n=1$: $1 \leqslant 1 = a_1 \leqslant 2$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $1 \leqslant a_n \leqslant 2$ für dieses n.
(IS) Dann gilt $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \overset{\text{(IV)}}{\leqslant} 1 + \frac{1}{1} = 2$ und $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \overset{\text{(IV)}}{\geqslant} 1 + \frac{1}{2} \geqslant 1$.
Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung.
Nun betrachte die Teilfolge $(a_{2n})_n$.
(2) $(a_{2n})_n$ monoton: $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{2n+2} \leqslant a_{2n}$: Beweis durch vollständige Induktion.
(IA) $n=1$: $a_4 = \frac{5}{3} \leqslant 2 = a_2$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $a_{2n+2} \leqslant a_{2n}$ für dieses n.
(IS) Dann gilt $a_{2n+4} = 1 + \dfrac{1}{a_{2n+3}} = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{a_{2n+2}}} = 1 + \dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n+2}+1} = 2 - \dfrac{1}{a_{2n+2}+1} \overset{\text{(IV)}}{\leqslant} 2 - \dfrac{1}{a_{2n}+1} = a_{2n+2}$.
Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung.
(3) Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$ existiert nach (1) und (2). Es gilt $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{a_{2n}+1}) \overset{\text{GWS}}{=} 2 - \frac{1}{a+1}$. Es gilt also $a = 2 - \frac{1}{a+1} \Leftrightarrow a(a+1) = 2(a+1) - 1 \Leftrightarrow a^2 + a - 2a - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, da die negative Lösung $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ wegen $a_n \geqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht auftreten kann.
Nun betrachte die Teilfolge $(a_{2n-1})_n$.
(2') $(a_{2n-1})_n$ monoton: $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_{2n+1} \geqslant a_{2n-1}$: Beweis durch vollständige Induktion.

(IA) $n=1$: $a_3 = \frac{3}{2} \geqslant 1 = a_1$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $a_{2n+1} \leqslant a_{2n-1}$ für dieses n.
(IS) Dann gilt $a_{2n+3} = 2 - \dfrac{1}{a_{2n+1}+1} \overset{\text{(IV)}}{\geqslant} 2 - \dfrac{1}{a_{2n-1}+1} = a_{2n+1}$.
Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung.
(3') Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$ existiert nach (1) und (2'). Es gilt $a' = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{a_{2n-1}+1}) \overset{\text{GWS}}{=} 2 - \frac{1}{a'+1}$. Es gilt also $a' = 2 - \frac{1}{a'+1} \Leftrightarrow a' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = a$ wie in (3).
Zu $\varepsilon > 0$ wähle n_0 so, daß $|a_{2[\frac{n}{2}]} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|a_{2[\frac{n}{2}]+1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant n_0$ (möglich, da $(a_{2n})_n$ und $(a_{2n+1})_n$ gegen a konvergieren). Dann gilt für $n \geqslant n_0$: $|a_n - a| \leqslant |a_{2[\frac{n}{2}]} - a| + |a_{2[\frac{n}{2}]+1} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, da $n = 2[\frac{n}{2}]$ oder $n = 2[\frac{n}{2}]+1$. Damit ist gezeigt, daß $(a_n)_n$ gegen $\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ konvergiert.

Aufgabe 10
Zerlege $(a_n)_n$ in Teilfolgen:

$$a_{4n} = \frac{(-1)^{4n}(4n)+1}{4n} + (-1)^{\frac{(4n)(4n-1)}{2}} = \frac{4n+1}{4n} + 1 = 1 + \frac{1}{4n} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{GWS}} 2.$$

$$a_{4n-3} = \frac{(-1)^{4n-3}(4n-3)+1}{4n-3} + (-1)^{\frac{(4n-3)(4n-4)}{2}} = \frac{-(4n-3)+1}{4n-3} + 1 = -1 + \frac{1}{4n-3} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{GWS}} 0.$$

$$a_{4n-2} = \frac{(-1)^{4n-2}(4n-2)+1}{4n-2} + (-1)^{\frac{(4n-2)(4n-3)}{2}} = \frac{4n-2+1}{4n-2} + (-1) = 1 + \frac{1}{4n-2} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{GWS}} 0.$$

$$a_{4n-1} = \frac{(-1)^{4n-1}(4n-1)+1}{4n-1} + (-1)^{\frac{(4n-1)(4n-2)}{2}} = \frac{-(4n-1)+1}{4n-1} - 1 = -1 + \frac{1}{4n-1} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{GWS}} -2.$$

Sei nun $(a_{n_k})_k$ eine beliebige konvergente Teilfolge von $(a_n)_n$. Da jedes Folgenglied in einer der obigen Teilfolgen auftritt, gehören zu (mindestens) einer der obigen Teilfolgen $(a_{m_k})_k$ unendlich viele Folgenglieder von $(a_{n_k})_k$, womit $(a_{n_k})_k$ gegen den Grenzwert von $(a_{m_k})_k$ konvergieren muß. Damit ist gezeigt, daß es keine weiteren Häufungspunkte von $(a_n)_n$ gibt, also ist $\{-2; 0; 2\}$ die Häufungspunktmenge, womit $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ folgt. $(a_{4n})_n$ ist eine gegen den Limes superior konvergente Teilfolge.

Aufgabe 11
M ist nicht abgeschlossen, da $\frac{1}{n^2} + \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, aber $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}) = 0 \notin M$, da $x + \sqrt{x} > 0$ für $x > 0$.
M ist offen: Sei $y_0 \in M$, dann existiert ein $x_0 \in (0;1)$ mit $y_0 = x_0 + \sqrt{x_0}$. Wähle nun $\varepsilon = \min\{x_0; 1 - x_0\}$ und sei $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$. Mit $x = z^2$ gilt dann $y = x + \sqrt{x} \Leftrightarrow z^2 + z - y = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + y}$. Betrachte nun $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + y}$. Es gilt $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + y} > -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + y_0 - \varepsilon} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x_0 + \sqrt{x_0} - \varepsilon} \geqslant -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x_0 - \varepsilon} \geqslant -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = 0$ und $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + y} < -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + y_0 + \varepsilon} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \sqrt{x_0} + x_0 + \varepsilon} \leqslant -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$, also ist $z \in (0;1)$ und damit $x = z^2 \in (0;1)$. Damit existiert zu jedem $y \in U_\varepsilon(y_0)$ ein $x \in (0;1)$ mit $y = x + \sqrt{x}$, also ist $y \in M$. Damit ist M offen.