Aufgabe:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gebe ein $c > 0$ mit $f(x+c) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (f sei also periodisch). Man zeige: f ist gleichmäßig stetig.

Lösung:
Sei $\varepsilon > 0$. Da $f|_{[0;2c]}$ eine stetige Funktion auf einem Kompaktum ist, ist sie gleichmäßig stetig. Es existiert daher ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in [0; 2c]$ mit $|x - y| < \delta$, o. B. d. A. sei $\delta < c$. Seien nun $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$, o. B. d. A. sei $y \geqslant x$. Dann ist $0 \leqslant x' = x - [\frac{x}{c}]c < c$ und $0 \leqslant y' = y - [\frac{x}{c}]c < x + \delta - [\frac{x}{c}]c < c + \delta < 2c$, also $x', y' \in [0; 2c]$. Aufgrund der Periodizität von f gilt $|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')|$, und da $y' - x' = y - [\frac{x}{c}] - (x - [\frac{x}{c}]c) = y - x < \delta$ ist, gilt $|f(x') - f(y')| < \varepsilon$, also ist f nach Definition gleichmäßig stetig.