Lösung zur 2. Klausur zur Analysis I

Marc Ensenbach

27. Februar 2002

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Setze $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, dann ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1,$$

also ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent und damit konvergent.

b) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihe:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k^{\log(k+1)})}.$$

Hinweis: Vereinfachen Sie zunächst den Quotienten.

Es ist

$$\frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k^{\log(k+1)})} = \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k+1)\log k} = \frac{\log(\frac{1}{k}(k+1))}{\log(k+1)\log k} = \frac{\log\frac{1}{k}+\log(k+1)}{\log(k+1)\log k}$$

$$= \frac{-\log k + \log(k+1)}{\log(k+1)\log k} = -\frac{1}{\log(k+1)} + \frac{1}{\log k}.$$

Damit erhält man

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k^{\log(k+1)})} = \sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{\log(k+1)}+\frac{1}{\log k}\right) = -\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\log(k+1)} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\log k}$$

$$= -\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{\log k} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\log k} = -\frac{1}{\log(n+1)} + \frac{1}{\log 2} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{GWS}}{\longrightarrow}} \frac{1}{\log 2},$$

also ist $\frac{1}{\log 2}$ der Wert der gegebenen Reihe.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $(a_k)_{k\geqslant 1}$ eine reelle, konvergente Folge mit $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a > 0$. Zeigen Sie: Falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|$ konvergent ist, dann konvergiert auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right|$.

Da $a_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a > 0$, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_k \geqslant \frac{a}{2}$ für alle $k \geqslant k_0$, also ist für $k \geqslant k_0$

$$\left|\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right| = \left|\frac{a_k - a_{k+1}}{a_k a_{k+1}}\right| = \frac{|a_{k+1} - a_k|}{a_{k+1} a_k} \leqslant \frac{|a_{k+1} - a_k|}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{4}{a^2} |a_{k+1} - a_k|.$$

Nach Voraussetzung ist damit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|$ eine konvergente Majorante von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right|$, womit diese Reihe konvergiert.

Aufgabe 3 (3+3+3 Punkte)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$

Setze

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{wenn } \exists k \in \mathbb{N} : n = k!, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, also berechnet sich der Konvergenzradius R der Reihe nach Cauchy-Hadamard über $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Es gilt $\sqrt[n!]{|a_{n!}|} = \sqrt[n!]{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ als Teilfolge von $(\sqrt[n]{2})_{n\geqslant 1}$, also ist 1 ein Häufungspunkt der Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\geqslant 1}$. Da $\sqrt[n!]{|a_{n!}|} \leqslant \sqrt[n!]{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ gilt, ist 1 der größte Häufungspunkt der Folge, womit $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ und damit $R = 1$ gilt.

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2} z^n$

Aus den Übungen ist bekannt, dass für $a, b > 0$ gilt: $\sqrt[n]{a^n + b^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \max\{a, b\}$. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^n + e^{-n}}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e^n + (\frac{1}{e})^n}}{\sqrt[n]{2}} \overset{\text{GWS}}{=} \frac{e}{1} = e,$$

und nach Cauchy-Hadamard ist $R = \frac{1}{e}$ der Konvergenzradius der Reihe.

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (5n + 3)(2z)^{3n}$

Es ist $(5n+3)(2z)^{3n} = (5n+3)\cdot 2^{3n}z^{3n} = (5n+3)\cdot 2^{3n}(z^3)^n$, also kann man die Reihe als Potenzreihe in z^3 auffassen. Für den Konvergenzradius R' dieser Reihe gilt

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(5n+3)2^{3n}} = \lim_{n\to\infty} 2^3 \sqrt[n]{5n+3} = 8,$$

da $1 \leqslant \sqrt[n]{5n+3} \leqslant \sqrt[n]{8n} = \sqrt[n]{8}\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{GWS}}{\longrightarrow}} 1\cdot 1 = 1$, also $\sqrt[n]{5n+3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Die Reihe konvergiert damit für $|z|^3 = |z^3| < \frac{1}{8}$ und divergiert für $|z|^3 > \frac{1}{8}$. Daraus ergibt sich der Konvergenzradius $\frac{1}{2}$ für die zu untersuchende Reihe.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass für eine Funktion $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
(i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
(ii) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{1}{f(\frac{1}{x})} = 0$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $y_0 \in (0,\infty)$, so dass $f(y) > \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $y \geqslant y_0$ gilt. Wähle $\delta = \frac{1}{y_0}$, dann gilt für $x \in (0,\delta)$: $f(\frac{1}{x}) > \frac{1}{\varepsilon}$, da $\frac{1}{x} \geqslant y_0$, und damit ist $\dfrac{1}{f(\frac{1}{x})} < \varepsilon$. Nach Definition ist dann (ii) gezeigt.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{1}{f(\frac{1}{x})} = 0$ und $M > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $\delta > 0$ mit $\dfrac{1}{f(\frac{1}{y})} < \dfrac{1}{M}$ für alle $y \in (0,\delta)$. Wähle $x_0 = \frac{1}{\delta}$, dann gilt $0 < y := \frac{1}{x} < \delta$ für alle $x > x_0$. Damit ist $\dfrac{1}{f(\frac{1}{y})} < \dfrac{1}{M}$, also $f(x) = f(\frac{1}{y}) > M$. Nach Definition ist dann (i) gezeigt.

Aufgabe 5 (2+3+2 Punkte)
Untersuchen Sie folgende Grenzwerte auf Existenz und bestimmen Sie sie gegebenenfalls:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

Es ist

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \sqrt{x^2+x} - x = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Wurzelfunktion erhält man mit den Grenzwertsätzen $\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{\cos(\sqrt{x})-1}{x}$

Für $x > 0$ ist

$$\frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!} - 1}{x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)!} - 1}{x} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)!}}{x}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{(2k+2)!} \underset{x \downarrow 0}{\longrightarrow} (-1)^1 \frac{1}{2!} = -\frac{1}{2},$$

da die betrachtete Potenzreihe den Konvergenzradius ∞ hat und somit auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

c) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$.

Für $x \neq 1$ ist

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x - 1} = \frac{|x - 1|}{x - 1} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 1 \\ -1 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

Damit ist $\lim_{x \downarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} = 1$ und $\lim_{x \uparrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} = -1$, womit der Grenzwert in 1 nicht existiert.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ nicht gleichmäßig stetig ist.

Sei $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{\delta} + \frac{1}{4}}$. Für $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2}$ gilt $|x - y| < \delta$, aber es ist

$$|f(x) - f(y)| = n - \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{\delta}{2}} = \frac{n\frac{\delta}{2}}{\frac{1}{n} + \frac{\delta}{2}} > \varepsilon,$$

da

$$\frac{n\frac{\delta}{2}}{\frac{1}{n} + \frac{\delta}{2}} > 1 \Leftrightarrow n\frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2} + \frac{1}{n} \Leftrightarrow n^2 - n - \frac{2}{\delta} > 0 \Leftrightarrow n > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{\delta} + \frac{1}{4}}.$$

Damit ist f nicht gleichmäßig stetig.

Aufgabe 7 (5 Punkte)
Für $k \in \mathbb{N}_0$ seien die Funktionen $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \cos(\frac{1}{x}) \exp(x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ ist f_k in $x_0 = 0$ stetig bzw. differenzierbar?

1. Fall: $k = 0$:
Betrachte die Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, dann ist aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{n\to\infty} f_0(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n)\exp(\tfrac{1}{2\pi n}) = \lim_{n\to\infty} \exp(\tfrac{1}{2\pi n}) = 1,$$

und für $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} f_0(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos((2n+1)\pi)\exp(\tfrac{1}{(2n+1)\pi}) = -\lim_{n\to\infty} \exp(\tfrac{1}{(2n+1)\pi}) = -1.$$

Da aber $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ist f_0 in $x_0 = 0$ nicht stetig und damit nicht differenzierbar.
2. Fall: $k = 1$:
Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine reelle Folge mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cos(\tfrac{1}{x_n})\exp(x_n) = 0,$$

da $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\cos(\frac{1}{x_n})$ beschränkt und die Exponentialfunktion stetig ist. Damit ist f_1 stetig in $x_0 = 0$. Weiterhin ist für $h \neq 0$

$$\frac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \frac{f_1(h)}{h} = \frac{hf_0(h)}{h} = f_0(h).$$

Nach dem ersten Fall kann der Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$ nicht existieren, womit f_1 in 0 nicht differenzierbar ist.
3. Fall: $k \geqslant 2$:
Es gilt $f_k(x) = x^{k-1} f_1(x)$, also ist f_k als Produkt in 0 stetiger Funktionen stetig in 0. Es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_k(h) - f_k(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_k(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hf_{k-1}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} f_{k-1}(h) = f_{k-1}(0) = 0,$$

da f_k für $k \geqslant 1$ stetig in 0 ist. Damit ist f_k für $k \geqslant 2$ in 0 differenzierbar.

Aufgabe 8 (6 Punkte)
Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann sind äquivalent:
(i) f ist stetig in x_0
(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Aus (i) folgt die Existenz eines $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D \cap U_\delta(x_0)$. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x_0| < \delta$, d. h. $x_n \in U_\delta(x_0)$, für alle $n \geqslant n_0$. Es folgt $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$, also $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Es sei angenommen, dass f nicht stetig in x_0 ist. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0$ ein x existiert mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$. Zu $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, existiert somit ein $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$. Aus $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ erhält man $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Wegen $|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$ konvergiert $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ aber nicht gegen $f(x_0)$. zu (ii), also ist f stetig in x_0.

Aufgabe 9 (3+4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Stetigkeits- und Unstetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$

1. Fall: $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$:
In x_0 ist f als Verknüpfung/Verkettung elementarer stetiger Funktionen stetig.
2. Fall: $x_0 \in \mathbb{Z}$:
Wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion ist

$$\lim_{x \downarrow x_0}([x] + \sqrt{x - [x]}) = \lim_{x \downarrow x_0}(x_0 + \sqrt{x - x_0}) = x_0$$

und

$$\lim_{x \uparrow x_0}([x] + \sqrt{x - [x]}) = \lim_{x \uparrow x_0}(x_0 - 1 + \sqrt{x - (x_0 - 1)}) = x_0 - 1 + 1 = x_0.$$

Da linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen, ist f in x_0 stetig.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 6x + 8} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ \dfrac{3x + 1}{x + 2} & \text{für } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$

In $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ist die Funktion als rationale Funktion stetig. Sei nun $x_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \neq 4$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - 5}{x - 4} = \frac{x_0 - 5}{x_0 - 4}.$$

Stetigkeit in x_0 ist daher gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} & \frac{x_0 - 5}{x_0 - 4} = g(x_0) = \frac{3x_0 + 1}{x_0 + 2} \\ \Leftrightarrow\ & (x_0 - 5)(x_0 + 2) = (3x_0 + 1)(x_0 - 4) \\ \Leftrightarrow\ & x_0^2 - 3x_0 - 10 = 3x_0^2 - 11x_0 - 4 \\ \Leftrightarrow\ & 2x_0^2 - 8x_0 + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_0 = 1 \lor x_0 = 3. \end{aligned}$$

Nun betrachte noch $x_0 = 4$: Wegen

$$\lim_{x \downarrow 4} g(x) = \lim_{x \downarrow 4} \frac{x - 5}{x - 4} = -\infty$$

kann g in 4 nicht stetig sein. Insgesamt erhält man, dass g genau in den Punkten aus $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$ unstetig ist.

Aufgabe 10 (1+3+1 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}$, die Teilmenge einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}$ ist, ist kompakt.

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, dann existieren $\min K$ und $\max K$. Für $x \in A$ ist auch $x \in K$ und damit $\min K \leqslant x \leqslant \max K$, also ist A beschränkt. Da A nach Voraussetzung abgeschlossen ist, ist A nach Definition kompakt.

b) Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Jede Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ mit $x_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die nur einen Häufungspunkt besitzt, ist konvergent.

Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge mit $x_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die nur einen Häufungspunkt x besitze. Unter der Annahme, dass $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nicht gegen x konvergent ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle n_0 ein $n \geqslant n_0$ existiert mit $|x_n - x| \geqslant \varepsilon$, also liegt die so gegebene Teilfolge $(x_{n_k})_k$ in $K' = K \setminus (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, was wieder kompakt ist. Damit hat die Teilfolge einen Häufungspunkt x' in K', der wegen $x \notin K'$ von x verschieden ist. zur Voraussetzung, also muss $(x_n)_{n\geqslant 1}$ konvergieren.

c) Die Aussage von b) gilt i. A. nicht, falls K abgeschlossen, aber nicht kompakt ist.

Sei $(x_n)_{n\geqslant 1}$ in der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R}$ definiert durch $x_n = (1+(-1)^n)n$ und sei $(x_{n_k})_k$ eine Teilfolge von $(x_n)_n$. Gibt es unendlich viele gerade n_k, so ist die Teilfolge divergent, ansonsten ist die Teilfolge für fast alle k gleich 0 und damit konvergent gegen 0, also ist 0 der einzige Häufungspunkt der Folge, aber $(x_n)_n$ ist nicht konvergent.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\dfrac{\sin x}{x} = x$ mindestens eine Lösung in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat.

Es gilt $\dfrac{\sin x}{x} = x \Leftrightarrow \sin x = x^2 \Leftrightarrow \sin x - x^2 = 0$. Es ist nach Leibniz $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \geqslant x - \dfrac{x^3}{6}$ für $x > 0$, also $\sin \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{48} - \frac{1}{4} > 0$, und es gilt $\sin \pi - \pi^2 = -\pi^2 < 0$. Da $x \mapsto \sin x - x^2$ als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ist, hat die Funktion nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $\xi \in [\frac{1}{2}, \pi]$, und es gilt $\dfrac{\sin \xi}{\xi} = \xi$.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter gelte $f^2(x) = g^2(x)$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass entweder $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ oder $f(x) = -g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Für jedes $x \in [a,b]$ gilt $f^2(x) = g^2(x)$, also $f(x) = g(x)$ oder $f(x) = -g(x)$. Es verbleibt zu zeigen, dass es keine Punkte $x_1, x_2 \in [a,b]$ gibt mit $f(x_1) = g(x_1)$ und $f(x_2) = -g(x_2)$. Dazu sei angenommen, dass solche x_1, x_2 existieren. Nun betrachte $f \cdot g$. Es gilt $(f \cdot g)(x_1) = f(x_1)g(x_1) = g^2(x_1) > 0$ und $(f \cdot g)(x_2) = f(x_2)g(x_2) = -g^2(x_2) < 0$. Da $f \cdot g$ als Produkt stetiger Funktionen stetig ist, existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $(f \cdot g)(\xi) = 0$, also mit $f(\xi) = 0$ oder $g(\xi) = 0$. zu $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$, da im Fall $g(\xi) = 0$ auch $f(\xi) = \pm g(\xi) = 0$ ist. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 13 (2+2+2 Punkte)

a) Geben Sie eine exakte Formulierung des Satzes von Rolle an.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b) = 0$. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

b) Seien $a < x_0 < b$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $(a, x_0) \subset D$ sowie $(x_0, b) \subset D$ und $L \in \mathbb{R}$. Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen dazu an, dass f für $x \to x_0$ konvergent gegen L ist.

(i) f konvergiert genau dann für $x \to x_0$ gegen L, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - L| < \varepsilon$.
(ii) f konvergiert genau dann für $x \to x_0$ gegen L, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \geqslant 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.
(iii) f konvergiert genau dann für $x \to x_0$ gegen L, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $0 < |x_0 - x_1|, |x_0 - x_2| < \delta$ gilt: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

c) Formulieren Sie exakt die Definition einer hebbaren Unstetigkeitsstelle.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein innerer Punkt von $D \cup \{x_0\}$. Dann heißt x_0 eine hebbare Unstetigkeitsstelle von f, wenn $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$ beide existieren und gleich sind, aber im Fall $x_0 \in D$ von $f(x_0)$ verschieden sind.