Lösung zur 3. Klausur zur Analysis I

Marc Ensenbach

17. April 2002

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die durch $x_1 = 2$ und $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

---

(1) Beschränktheit: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2 \leqslant x_n \leqslant 4$:
(IA) $n = 1$: $2 \leqslant x_1 = 2 \leqslant 4$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $2 \leqslant x_n \leqslant 4$ für dieses n.
(IS) Es ist $2 < 1 + \sqrt{2} \overset{\text{IV}}{\leqslant} 1 + \sqrt{x_n} = x_{n+1} \overset{\text{IV}}{\leqslant} 1 + \sqrt{4} = 3 < 4$. Nach dem Induktionsprinzip ist die Behauptung bewiesen.
(2) Monotonie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \leqslant x_{n+1}$:
(IA) $n = 1$: $x_1 = 2 < 1 + \sqrt{2} = x_2$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $x_n \leqslant x_{n+1}$ für dieses n.
(IS) Es gilt $x_{n+2} = 1 + \sqrt{x_{n+1}} \overset{\text{IV}}{\geqslant} 1 + \sqrt{x_n} = x_{n+1}$. Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung.
(3) Nach (1) und (2) existiert $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \sqrt{x_n}) \underset{\text{GWS}}{\overset{\sqrt{\ }\text{ stetig}}{=}} 1 + \sqrt{x}$. Nun ist $x = 1 + \sqrt{x} \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$. Da $3 - \sqrt{5} < 4$ und damit $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) < 2$ gilt, aber alle Folgenglieder größer/gleich 2 sind, muss $x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ der Grenzwert der Folge sein.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\underline{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ mit } a_n := \begin{cases} \frac{1}{7^k} & \text{für } n = 2k-1, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{\sqrt[5]{k^4}} & \text{für } n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}}$

Da $\frac{1}{7^k} > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{k^4}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{4}{5}}}$. Wegen $\dfrac{1}{k^{\frac{4}{5}}} \geqslant \dfrac{1}{k}$ ist die harmonische Reihe divergente Minorante der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{k^4}}$, die somit ebenfalls divergent ist. Daraus folgt die (absolute) Divergenz der gegebenen Reihe.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\log n}$.

Die Reihe ist nicht wohldefiniert, der Summand für $n = 1$ nicht existiert. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Reihe bei $n = 2$ beginnt. Mit der Abschätzung $\log n \leqslant n - 1$ gilt $\left|\frac{i^n}{\log n}\right| = \frac{1}{\log n} \geqslant \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$, also ist die harmonische Reihe divergente Minorante, womit die Reihe absolut divergiert. Setze nun $a_n = i^n$ und $b_n = \frac{1}{\log n}$, dann ist $(A_n)_{n\geqslant 2}$ mit $A_n := \sum_{k=2}^{n} a_k$ beschränkt, denn A_n nimmt wegen $A_5 = -1-i+1+i = 0$ und damit $A_{4n+m} = A_m$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \{2;3;4;5\}$ nur endlich viele Werte an. Weiterhin gilt $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und $b_{n+1} \leqslant b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\log(n+1)}{\log n} \geqslant 1$ wegen der Monotonie der Logarithmusfunktion gilt. Nach dem Dirichletkriterium ist dann $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\log n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(a_k)_{k\geqslant 1}$ eine monoton fallende Folge mit den Eigenschaften $a_1 > 0$ und $2a_{2k} > a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz.

Zunächst zeige mittels vollständiger Induktion, dass $2^n a_{2^n} \geqslant a_1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
(IA) $n = 0$: $2^0 a_{2^0} = a_1$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und gelte $2^n a_{2^n} \geqslant a_1$ für dieses n.
(IS) Nach der Voraussetzung der Aufgabenstellung gilt $2a_{2^{n+1}} = 2a_{2\cdot 2^n} \geqslant a_{2^n}$ und damit $2^{n+1}a_{2^{n+1}} = 2\cdot 2^n a_{2^{n+1}} \geqslant 2^n a_{2^n} \overset{\text{IV}}{\geqslant} a_1$. Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung.
Aus dem Gezeigten folgt insbesondere, dass $a_{2^n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Da $(a_k)_{k\geqslant 1}$ monoton fallend ist, müssen damit alle Folgenglieder positiv sein, also kann man die gegebene Reihe umordnen: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} a_n \overset{(a_n)\text{ monoton}}{\geqslant} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_1$.
Diese Reihe divergiert, da $(a_1)_{n\geqslant 1}$ keine Nullfolge ist. Damit divergiert auch $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$.

Es gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 0+1} - \frac{1}{2(N+1)+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4N+6} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2}$, also ist $\frac{1}{2}$ der Wert der Reihe.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Es sei $(a_k)_{k\geqslant 1}$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right)$ konvergiert.

Nach den Voraussetzungen der Aufgabenstellung konvergiert $(a_k)_{k\geqslant 1}$ gegen einen Grenzwert $a \in (0;\infty)$. Da $(a_k)_{k\geqslant 1}$ monoton steigend ist, gilt $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k} \leqslant \frac{1}{a_1}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k) = \frac{1}{a_1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) = \frac{1}{a_1}\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1) = \frac{1}{a_1}(a-a_1)$, also ist $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right)$ nach dem Majorantenkriterium (absolut) konvergent.

Aufgabe 6 (3+3+3 Punkte)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}z^n$.

Setze $a_n = \binom{2n}{n}z^n$, dann ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2(n+1))!|z|^{n+1}}{(n+1)!(n+1)!}\cdot\frac{n!n!}{(2n)!|z|^n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}|z| = \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}|z| = \frac{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}|z| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{GWS}} 4|z|$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe damit für $|z|<\frac{1}{4}$ und divergiert für $|z|>\frac{1}{4}$, also ist $\frac{1}{4}$ der Konvergenzradius der Reihe.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\arctan(n)z^n$.

Es gilt $\arctan n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2} > 1$, also gibt es ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $\arctan n \geqslant 1$ für alle $n\geqslant n_0$. Für $n\geqslant n_0$ ist damit $1 = \sqrt[n]{1} \leqslant \sqrt[n]{\arctan n} \leqslant \sqrt[n]{\frac{\pi}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, also konvergiert $\sqrt[n]{\arctan n}$ nach dem Sandwichlemma gegen 1. Mit Cauchy-Hadamard folgt, dass 1 der Konvergenzradius der Reihe ist.

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-n)z^n$.

Es gilt $\sqrt[n]{\exp(-n)} = \exp(-1) = \frac{1}{e}$, also ist nach Cauchy-Hadamard e der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Aufgabe 7 (2+3+3 Punkte)
Untersuchen Sie folgende Grenzwerte auf Existenz und bestimmen Sie sie gegebenenfalls.

a) $\lim_{x\downarrow 0}(-1)^{[\frac{1}{x}]}$.

Es gilt $x_n = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mit $x_n > 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $(-1)^{[\frac{1}{x_n}]} = (-1)^{2n} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, weiterhin gilt $y_n = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mit $y_n>0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $(-1)^{[\frac{1}{y_n}]} = (-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$, also kann der gesuchte Grenzwert nicht existieren.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2-\frac{3}{\sqrt{x}})^3\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{x^n}\right)-1}{1+\frac{1}{2^x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}$.

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ und der Stetigkeit der Potenzreihe $x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ in $(-1;1)$ gilt mit den GWS

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2-\frac{3}{\sqrt{x}})^3\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{x^n}\right)-1}{1+\frac{1}{2^x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}} = \frac{(2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x}})^3\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\right)^n\right)-1}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2^x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}} = \frac{2^3\cdot 1-1}{1+0-0}=7.$$

c) $\lim\limits_{x\downarrow 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Nach der Regel von L'Hospital ist $\lim\limits_{x\downarrow 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right) = \lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{e^x-1-x}{xe^x-x} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{e^x-1}{e^x+xe^x-1} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{e^x}{2e^x+xe^x} \overset{\text{GWS}}{=} \dfrac{1}{2}$.

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Seien $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ und $g:[0;1]\to\mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit, dass $f\cdot g$ gleichmäßig stetig ist.

Da f und g als stetige Funktionen auf einem Kompaktum beschränkt sind, gibt es ein $M\in\mathbb{R}$ mit $|f(x)|,|g(x)|\leqslant M$ für alle $x\in[0;1]$. Sei nun $\varepsilon>0$. Da f und g als stetige Funktionen auf einem Kompaktum gleichmäßig stetig sind, gibt es $\delta_1,\delta_2>0$ mit $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2M}$ für alle $x,y\in[0;1]$ mit $|x-y|<\delta_1$ und $|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2M}$ für alle $x,y\in[0;1]$ mit $|x-y|<\delta_2$. Setze $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$, dann gilt für alle $x,y\in[0;1]$ mit $|x-y|<\delta$: $|(fg)(x)-(fg)(y)|=|f(x)g(x)-f(y)g(y)|=|f(x)g(x)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(y)g(y)|\leqslant|f(x)g(x)-f(y)g(x)|+|f(y)g(x)-f(y)g(y)|=|g(x)|\cdot|f(x)-f(y)|+|f(y)|\cdot|g(x)-g(y)|\leqslant M\cdot|f(x)-f(y)|+M\cdot|g(x)-g(y)|<M\frac{\varepsilon}{2M}+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$, also ist $f\cdot g$ nach Definition gleichmäßig stetig.

Aufgabe 9 (5 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto\begin{cases} x^2(1+\log|x|) & \text{für } x\neq 0,\\ 0 & \text{für } x=0\end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit, berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung und untersuchen Sie diese auf Stetigkeit.

Für $x<0$ ist $f(x)=x^2(1+\log(-x))$, für $x>0$ ist $f(x)=x^2(1+\log x)$, also ist f für $x\neq 0$ als Verknüpfung/Verkettung elementarer Funktionen differenzierbar. Betrachte nun die Stelle 0: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2(1+\log|h|)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h(1+\log|h|)=\lim\limits_{h\to 0}(h+h\log|h|)\overset{\text{GWS}}{=}\lim\limits_{h\to 0}h\log|h|$. Es gilt $\lim\limits_{h\downarrow 0}h\log|h|=\lim\limits_{h\downarrow 0}h\log h=0$ nach Vorlesung, weiterhin ist $\lim\limits_{h\uparrow 0}h\log|h|=\lim\limits_{h\uparrow 0}h\log(-h)=\lim\limits_{h\downarrow 0}(-h)\log h=0$, also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten. Damit ist f in 0 differenzierbar mit Ableitung 0. Für $x < 0$ hat man nach den Ableitungsregeln $f'(x) = 2x(1 + \log(-x)) + x^2\frac{1}{x} = x(3 + 2\log(-x))$, für $x > 0$ ist $f'(x) = 2x(1 + \log x) + x^2\frac{1}{x} = x(3 + 2\log x)$, also lautet die Ableitung insgesamt

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x(3 + 2\log|x|) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} x(3 + 2\log|x|) = \lim\limits_{x\to 0}(3x + 2x\log|x|)$. Wie oben erhält man, dass dieser Grenzwert $0 = f'(0)$ ist, also ist f' in 0 stetig. Da f' auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig ist, ist f' insgesamt auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Aufgabe 10 (5 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \neq 0$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n .$$

Hinweis: Wenden Sie zunächst – für geeignete n – den Logarithmus auf den Ausdruck an.

Es ist $\log \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = n(\log(f(a + \frac{1}{n})) - \log f(a)) = \frac{\log(f(a + \frac{1}{n})) - \log f(a)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} (\log \circ f)'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}$. Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\left(\log \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n \right)$. Da $x \mapsto \exp x$ stetig ist, ist dieser Ausdruck gleich $\exp\left(\lim\limits_{n\to\infty} \log \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n \right) = \exp\left(\frac{f'(a)}{f(a)} \right)$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)
Es seien $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, D offen, $n \in \mathbb{N}$ und $f_k : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar für $k = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass $F_n := \prod\limits_{k=1}^{n} f_k$ differenzierbar ist mit $\frac{F_n'}{F_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k}$.

Zeige diese Aussage mit vollständiger Induktion nach n.

(IA) $n = 1$: Nach der Aufgabenstellung ist f_1 differenzierbar. Es gilt $\frac{F_1'}{F_1} = \frac{f_1'}{f_1} = \sum\limits_{k=1}^{1} \frac{f_k'}{f_k}$.

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für dieses n.
(IS) $F_{n+1} = F_n f_{n+1}$ ist als Produkt differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Es gilt $\frac{F_{n+1}'}{F_{n+1}} = \frac{(F_n f_{n+1})'}{F_n f_{n+1}} = \frac{F_n' f_{n+1} + F_n f_{n+1}'}{F_n f_{n+1}} = \frac{F_n'}{F_n} + \frac{f_{n+1}'}{f_{n+1}} \overset{\text{IV}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f_k'}{f_k} + \frac{f_{n+1}'}{f_{n+1}} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{f_k'}{f_k}$. Dies ist die Aussage für $n + 1$, also ist die Behauptung mit dem Induktionsprinzip bewiesen.

Aufgabe 12 (4 Punkte)
Die Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ seien auf dem Intervall $I := (-r; r)$ mit $r > 0$ differenzierbar. Zusätzlich gelte $f(x)g(x) = x$ für alle $x \in I$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie: $g(0) \neq 0$.

Es gilt $1 = (fg)'(0) = f(0)g'(0) + f'(0)g(0) \overset{f(0)=0}{=} f'(0)g(0)$, also muss $f'(0), g(0) \neq 0$ gelten.

Aufgabe 13 (3 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ stetig. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Annahme: f ist nicht konstant. Dann gibt es $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) =: y_1 \neq y_2 := f(x_2)$ (o. B. D. A. sei $y_1 < y_2$). Nun gibt es ein $y \in (y_1; y_2)$ mit $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Da f stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$. zum Zielbereich, also muss f konstant sein.

Aufgabe 14 (2+2+2 Punkte)

a) Geben Sie eine exakte Formulierung des Satzes von Bolzano-Weierstrass in der Mengenversion an.

Jede beschränkte, unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

b) Formulieren Sie exakt die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit.

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt.

c) Formulieren Sie exakt die Definition der Folgenkompaktheit. Wie ist der Zusammenhang zwischen der Folgenkompaktheit und Kompaktheit?

Eine Menge M heißt folgenkompakt, wenn jede Folge in M einen Häufungspunkt in M hat. Folgenkompaktheit und Kompaktheit sind äquivalent.