Übungsaufgaben zur Analysis I, 1. Blatt

Marc Ensenbach

29. März 2002

Aufgabe 1
Man beweise mittels vollständiger Induktion:
a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k = \frac{1}{4}(1+(-1)^{n-1}(2n+1))$.
b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! \leqslant n^{n-1}$.

Aufgabe 2
Es seien $(x_n)_{n\geqslant 1}$ und $(y_n)_{n\geqslant 1}$ komplexe Folgen. Man zeige: Konvergieren die Folgen $(x_n+y_n)_{n\geqslant 1}$ und $(x_n-y_n)_{n\geqslant 1}$, so konvergiert auch die Folge $(x_n y_n)_{n\geqslant 1}$.

Aufgabe 3
Untersuche die Folgen $(a_n)_{n\geqslant 1}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.
a) $a_n = \sqrt[n]{a^n + (1+(-1)^n)\log(a+1)^n}$ für $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$.
b) $a_n = \left(\dfrac{1+i}{a+i}\right)^n$ für $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4
Man untersuche die durch $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \dfrac{4a_n+3}{a_n+2}$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte rekursive Folge auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 5
Man bestimme die Häufungspunktmenge der Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit $a_n = \dfrac{i^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{1}{2n}+i^n}$.

Aufgabe 6
Gegeben sei die Menge $M = \{\frac{2m-1}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$.
a) Man bestimme $\inf M$ und $\sup M$ und untersuche, ob M ein Minimum bzw. Maximum hat.
b) Man bestimme die Häufungspunktmenge von M.
c) Man untersuche M auf Offenheit.
d) Man untersuche M auf Abgeschlossenheit.

Aufgabe 7
Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:
a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!3^n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Aufgabe 8
Man berechne die Werte der folgenden Reihen:
a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n^2}}{2^n}$.

Aufgabe 9
Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:
a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}z^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n})^{\sqrt{n}}z^n$, c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$, d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}z^{n^2}$.

Aufgabe 10
Man zeige: Eine monoton wachsende Funktion $f:[a;b]\to[a;b]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, hat einen Fixpunkt, nämlich $\sup\{x\in[a;b]\mid x\leqslant f(x)\}$.

Aufgabe 11
Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0\in\mathbb{R}$ und $g:(0;\infty)\to\mathbb{R}, h\mapsto \sup f((x_0-h;x_0+h))-\inf f((x_0-h;x_0+h))$. Man zeige: f ist genau dann stetig in x_0, wenn $\lim\limits_{h\to 0}g(h)=0$ ist.

Aufgabe 12
Man untersuche folgende Grenzwerte auf Existenz und bestimme sie gegebenenfalls:
a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x-1+\frac{1}{x+1}}$, b) $\lim\limits_{x\downarrow 0}(\log(x+x^b)-\log x)$, $b\in\mathbb{R}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x+x^2}-[\frac{1}{x}])$.

Aufgabe 13
Man bestimme alle Unstetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto (x^2-x)[x]$.
b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \begin{cases}3x^3+3x^2+3 & \text{für } x\in M,\\ x^2+x+3 & \text{für } x\notin M,\end{cases}$ wobei $M=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2n+1};\frac{1}{2n}\right)$.

Aufgabe 14
Man zeige, daß die Gleichung $\sin\frac{1}{x}=x-e^{x-1}$ eine Lösung $x\in\mathbb{R}$ hat.

Aufgabe 15
Man zeige: Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und $U\subset\mathbb{R}$ offen, so ist auch $f^{-1}(U)$ offen.

Aufgabe 16
Man zeige: Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so existiert eine Konstante $c\in\mathbb{R}$, so daß $|f(x)|\leqslant c(|x|+1)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 17
Man untersuche folgende Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in 0:
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \cos|\log(x+1)|$.
b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases}x^k\sin\log|x| & \text{für } x\neq 0,\\ 0 & \text{für } x=0,\end{cases}$ wobei $k\in\mathbb{N}_0$ ist.

Aufgabe 18
Seien $\varepsilon>0$, $x_0\in\mathbb{R}$ und $f,g:[x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon]\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man zeige: Gilt $g(x_0)=0$ und ist g in x_0 differenzierbar, so ist auch $h:x\mapsto f(x)g(x)$ differenzierbar in x_0.