# Übungsaufgaben zur Analysis I, 2. Blatt

Marc Ensenbach

8. April 2002

**Aufgabe 1**
Es sei $f^{(0)} := f$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$.
a) Man zeige formal: Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ ist $(f^{(m)})^{(n)} = f^{(m+n)}$.
b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 e^x$, so gilt $f^{(n)}(x) = (n(n-1) + 2nx + x^2)e^x$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

**Aufgabe 2**
Man zeige: $\dfrac{a + b + |a - b|}{2} = \max\{a; b\}$.

**Aufgabe 3**
Man zeige: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z| = 1$ genau dann, wenn es ein $w \in \mathbb{C}$ gibt mit $w\overline{w}^{-1} = z$.

**Aufgabe 4**
Man berechne die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n \geqslant 1}$ oder zeige, daß diese nicht existieren.
a) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n + a}\right)^n$ für $a \in [0; \infty)$, b) $a_n = e^{n!\pi i r}$ für $r \in \mathbb{Q}$.

**Aufgabe 5**
Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv. Man zeige: $\liminf\limits_{n \to \infty} \sqrt[\varphi(n)]{n} = 1$.

**Aufgabe 6**
Man untersuche die durch $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = 2 + \sqrt{a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

**Aufgabe 7**
Man bestimme die Häufungspunktmenge der Folge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ mit $a_n = \sqrt[n]{|a^n + 2^n|}$ für $a \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 8**
a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ kompakt. Man zeige, daß auch $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ kompakt ist.
b) Gilt die Aussage aus Teil a) auch noch, wenn man „kompakt“ durch „abgeschlossen“ ersetzt?

**Aufgabe 9**
Es sei $M = \{\frac{x}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\}$.
a) Man bestimme $\sup M$, $\inf M$ und gegebenenfalls $\max M$ und $\min M$.
b) Man bestimme die Häufungspunktmenge von $M$.
c) Man untersuche $M$ auf Offenheit und Abgeschlossenheit.

**Aufgabe 10**

Man berechne den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

**Aufgabe 11**

Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\frac{1}{k}$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt[k]{k}$.

**Aufgabe 12**

Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} z^k$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(z \sin\frac{1}{k}\right)^k$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{\log k}{k}} z^k$, d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k^2}} z^{\frac{k(k+1)}{2}}$.

**Aufgabe 13**

Sei $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ injektiv. Man zeige: Für den Konvergenzradius $R$ der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\varphi(n)}$ gilt $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[\varphi(n)]{|a_n|}$.

**Aufgabe 14**

Man bestimme alle Unstetigkeitsstellen der folgenden Funktionen.

a) $f : (0;\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto [x] - \frac{[x]^2}{x}$, b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 + a & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 2x & \text{für } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ wobei $a \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 15**

Man zeige: Ist $D \subset \mathbb{R}$ und sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, so ist auch $h : x \mapsto \max\{f(x); g(x)\}$ stetig in $x_0$.

**Aufgabe 16**

Man zeige: Ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom, $m \in \mathbb{N}$ und $f : (0;\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto p(x) \sin\frac{1}{x^m}$, so gibt es ein $R > 0$, so daß $\frac{1}{4}|a_n| \cdot |x|^{n-m} \leqslant |f(x)| \leqslant 4|a_n| \cdot |x|^{n-m}$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| > R$ gilt.

**Aufgabe 17**

Man untersuche folgende Grenzwerte auf Existenz und bestimme sie gegebenenfalls.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|^{n-1} \sin x}{x^n}$ für $n \in \mathbb{Z}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

**Aufgabe 18**

Man zeige: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, $a_n = f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{\infty; -\infty\}$, so ist auch $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$.

**Aufgabe 19**

Man untersuche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in 0.