Aufgabe:
Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine komplexe Folge mit $|a_{n+2}-a_{n+1}| < \frac{1}{n}|a_{n+1}-a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent ist.
Lösung:
(1) Behauptung: Für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|a_{n_0+k+1} - a_{n_0+k}| \leqslant \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n_0+j} |a_{n_0+1} - a_{n_0}|.$$

Beweis durch vollständige Induktion nach k.
(IA) Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, dann gilt die Aussage klarerweise für $k = 0$.
(IV) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|a_{n_0+k+1} - a_{n_0+k}| \leqslant \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n_0+j} |a_{n_0+1} - a_{n_0}|$$

für alle $n_0 \in \mathbb{N}$.
(IS) Es gilt

$$\begin{aligned}|a_{n_0+k+2} - a_{n_0+k+1}| &\overset{\text{Vor.}}{\leqslant} \frac{1}{n_0+k}|a_{n_0+k+1} - a_{n_0+k}| \overset{\text{(IV)}}{\leqslant} \frac{1}{n_0+k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n_0+j} |a_{n_0+1} - a_{n_0}| \\ &= \prod_{j=0}^{k} \frac{1}{n_0+j} |a_{n_0+1} - a_{n_0}|.\end{aligned}$$

Dies ist die Aussage für $n+1$. Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung.
(2) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{2}{\varepsilon|a_2-a_1|} + 1$ (existiert nach Archimedischem Prinzip, da $|a_2 - a_1| \neq 0$ gelten muss, denn sonst wäre nach Voraussetzung $|a_3 - a_2| < |a_2 - a_1| = 0$ im Widerspruch zur Betragsdefinition). Für $m, n \geqslant N$ mit $m \geqslant n$ (o. B. d. A.) gilt dann

$$\begin{aligned}|a_m - a_n| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k - \sum_{k=n}^{m-1} a_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{m-1} a_{k+1} - \sum_{k=n}^{m-1} a_k\right| \\ &= \left|\sum_{k=n}^{m-1} (a_{k+1} - a_k)\right| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leqslant} \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| = \sum_{k=0}^{m-n-1} |a_{n+k+1} - a_{n+k}| \\ &\overset{(1)}{\leqslant} \sum_{k=0}^{m-n-1} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n+j} |a_{n+1} - a_n| \leqslant \sum_{k=0}^{m-n-1} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{n} |a_{n+1} - a_n| \\ &= \sum_{k=0}^{m-n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^k |a_{n+1} - a_n| \overset{\text{geom. Summe}}{=} \frac{1 - (\frac{1}{n})^{m-n}}{1 - \frac{1}{n}} |a_{n+1} - a_n| \\ &\leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} |a_{n+1} - a_n| \overset{n \geqslant N \geqslant 2}{\leqslant} 2|a_{n+1} - a_n| \overset{(1), n_0 = 1}{\leqslant} 2 \prod_{j=0}^{n-2} \frac{1}{1+j} |a_2 - a_1| \\ &\leqslant 2\frac{1}{n-1}|a_2 - a_1| \leqslant 2\frac{1}{N-1}|a_2 - a_1| < 2\frac{1}{\frac{2}{\varepsilon|a_2-a_1|}}|a_2 - a_1| = \varepsilon,\end{aligned}$$

also ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ nach dem Cauchy-Kriterium konvergent.