# Übungen zur 2. Klausur zur Analysis I

Marc Ensenbach

16. Dezember 2003

**Aufgabe 1**
Man untersuche jeweils $(a_n)_{n\geqslant 1}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.
a) $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, b) $a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$, c) $a_n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n!}$.

**Aufgabe 2**
Sei $c \in \mathbb{C}$. Man bestimme alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit $a_n = \sqrt[n]{|c+(-1)^n|}$ für $n \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 3**
Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sei gegeben durch $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{a_n^2-3}{2a_n-4}$ für $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass die Folge wohldefiniert ist, untersuche sie auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

**Aufgabe 4**
Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine reelle Folge mit $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass $(a_n)_{n\geqslant 1}$ höchstens zwei verschiedene Häufungspunkte besitzt.

**Aufgabe 5**
Sei $M = \{2n + \frac{x}{|x|+1} \mid n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\}$. Man bestimme die Häufungspunkte, die inneren und die isolierten Punkte von $M$ und untersuche $M$ auf Offenheit und Abgeschlossenheit.

**Aufgabe 6**
Sei $M \subset \mathbb{R}$ sowohl offen als auch abgeschlossen. Man zeige, dass $M = \emptyset$ oder $M = \mathbb{R}$ gilt.

**Aufgabe 7**
Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz.
a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(e-\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)$, b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2+(-1)^k)\frac{1}{k}$, c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2}$,
d) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{falls ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } k = m^4 \text{ existiert,} \\ \frac{1}{k^2} & \text{sonst.} \end{cases}$

**Aufgabe 8**
Man berechne jeweils den Wert der Reihe.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{k}{2}}}{2^k}$, b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ (Hinweis: Teleskopsumme).

**Aufgabe 9**
Sei $(a_k)_{k\geqslant 0}$ eine komplexe Folge.

a) Man zeige: Ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$ konvergent.

b) Man gebe ein Beispiel für eine konvergente Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ an, für die $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$ nicht konvergiert.

**Aufgabe 10**
Sei $(a_k)_{k\geqslant 0}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen und $(n_k)_{k\geqslant 0}$ eine streng monoton steigende Indexfolge. Man zeige:

a) Ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist auch $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (n_{k+1} - n_k) a_{n_{k+1}}$ konvergent.

b) Ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (n_{k+1} - n_k) a_{n_k}$ konvergent, so ist auch $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

**Aufgabe 11**
Man bestimme die Konvergenzradien der gegebenen Potenzreihen.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (3^k + 3^{-k}) z^k$, b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (1 + (-1)^k) z^k$, c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{3k}{k} z^{2k}$,

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k!}$.

**Aufgabe 12**
Sei $(a_k)_{k\geqslant 0}$ eine komplexe Folge mit $0 < \limsup_{k\to\infty} |a_k| < \infty$. Man zeige, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ den Konvergenzradius 1 hat.