Lösungen zu den Übungen zur 2. Klausur zur Analysis I

Marc Ensenbach

8. Januar 2004

Aufgabe 1
Man untersuche jeweils $(a_n)_{n\geqslant 1}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $\underline{a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$

Betrachte den Quotienten

$$\frac{(1+\frac{2}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^n} = \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{\frac{n+2}{n}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$
$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}.$$

Da $((1+\frac{1}{n+1})^{n+1})_{n\geqslant 1}$ eine Teilfolge von $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\geqslant 1}$ ist, gilt nach III(1.14) und III(2.7)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e.$$

Da $(\frac{1}{n+1})_{n\geqslant 1}$ eine Teilfolge von $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ ist, gilt nach III(1.5) und III(1.14)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,$$

und mit den Limitenregeln (III(1.7)) folgt dann aus obiger Darstellung

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{(1+\frac{2}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^n} \overset{\text{III}(2.7)}{=} e\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{2}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^n}$$
$$= e\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e\cdot e\cdot(1+0)^{-1} = e^2.$$

b) $\underline{a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n}$

Für $n \geqslant 2$ ist $0 < \frac{n+1}{2n} \leqslant \frac{n+\frac{n}{2}}{2n}$, so dass aus der Monotonie der Exponentiation (I(3.7)) folgt:

$$0 \leqslant \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n \leqslant \left(\frac{n+\frac{n}{2}}{2n}\right)^n = \left(\frac{\frac{3}{2}n}{2n}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{3}{4})^n = 0$ nach III(1.5) beziehungsweise III(1.11) gilt, folgt mit dem Sandwich-Lemma (III(1.10)) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

c) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{-n!}$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-n!} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right)^{n!} = \left(\frac{1}{\frac{n}{n+1}}\right)^{n!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n!}$$
$$= \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{(n-1)!}.$$

Wegen $0 < 2 \leqslant (1 + \frac{1}{n})^n$ nach III(2.7) folgt aufgrund der Monotonie der Exponentiation

$$a_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{(n-1)!} \geqslant 2^{(n-1)!}.$$

Da $(n-1)! \geqslant n-1$ ist und $2 \geqslant 1$ gilt, folgt $2^{(n-1)!} \geqslant 2^{n-1}$. Sei nun $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$. Da nach III(2.14) die Folge $(2^n)_{n\geqslant 1}$ bestimmt divergent gegen ∞ ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^n \geqslant 2M$ für alle $n \geqslant n_0$. Für $n \geqslant n_0$ gilt dann $a_n \geqslant 2^{(n-1)!} \geqslant 2^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^n \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2M = M$, also ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ nach Definition (III(2.13)) bestimmt divergent gegen ∞.

Aufgabe 2

Sei $c \in \mathbb{C}$. Man bestimme alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit $a_n = \sqrt[n]{|c + (-1)^n|}$ für $n \in \mathbb{N}$.

---

1. Fall: $c = 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $a_{2n} = \sqrt[2n]{|1 + (-1)^{2n}|} = \sqrt[2n]{2}$, und da $(\sqrt[2n]{2})_{n\geqslant 1}$ eine Teilfolge von $(\sqrt[n]{2})_{n\geqslant 1}$ ist und letztere nach Übung 5 gegen 1 konvergiert, konvergiert $(a_{2n})_{n\geqslant 1}$ nach III(1.14) gegen 1. Weiter ist $a_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{|1 + (-1)^{2n-1}|} = \sqrt[2n-1]{0} = 0$, also konvergiert $(a_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ nach III(1.5) gegen 0. Damit sind 0 und 1 Häufungspunkte von $(a_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Fall: $c = -1$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $a_{2n} = \sqrt[2n]{|-1 + (-1)^{2n}|} = \sqrt[2n]{0} = 0$, also konvergiert $(a_{2n})_{n\geqslant 1}$ nach III(1.5) gegen 0. Weiter ist $a_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{|-1 + (-1)^{2n-1}|} = \sqrt[2n-1]{2}$, und da $(\sqrt[2n-1]{2})_{n\geqslant 1}$ eine Teilfolge von $(\sqrt[n]{2})_{n\geqslant 1}$ ist und letztere gegen 1 konvergiert, konvergiert $(a_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ nach III(1.14) gegen 1. Damit sind 0 und 1 Häufungspunkte von $(a_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Fall: $c \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 1\}$. Dann ist sowohl $|c-1| \neq 0$ als auch $|c+1| \neq 0$ und damit konvergieren $(a_{2n})_{n\geqslant 1} = (\sqrt[2n]{|c+1|})_{n\geqslant 1}$ und $(a_{2n-1})_{n\geqslant 1} = (\sqrt[2n-1]{|c-1|})_{n\geqslant 1}$ als Teilfolgen von $(\sqrt[n]{|c+1|})_{n\geqslant 1}$ beziehungsweise $(\sqrt[n]{|c-1|})_{n\geqslant 1}$ nach III(1.14) und Übung 5 gegen 1, also ist 1 ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geqslant 1}$.

Sei nun a ein beliebiger Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$, die gegen a konvergiert. Da jedes n_k entweder von der Form $2n$ oder $2n-1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist, besitzt $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ eine Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l\geqslant 1}$, die Teilfolge von $(a_{2n})_{n\geqslant 1}$ oder von $(a_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ ist und somit nach III(1.14) gegen einen der aufgeführten Häufungspunkte konvergiert. Aufgrund der Konvergenz von $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ ist dieser Häufungspunkt nach III(1.16) auch Grenzwert von $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$, also ist a einer der genannten Häufungspunkte. Damit gibt es keine weiteren Häufungspunkte.

Aufgabe 3
Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sei gegeben durch $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{a_n^2-3}{2a_n-4}$ für $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass die Folge wohldefiniert ist, untersuche sie auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

---

(1) Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist a_n wohldefiniert und es gilt $0 \leqslant a_n \leqslant 1$.
Beweis durch vollständige Induktion nach n:
(IA) Wegen $a_1 = 0$ ist für $n = 1$ das Folgenglied a_n wohldefiniert und es gilt $0 \leqslant a_n \leqslant 1$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für dieses n.
(IS) Wegen $a_n \leqslant 1$ (nach (IV)) ist $2a_n - 4 \leqslant -2 < 0$ und damit ist $a_{n+1} = \frac{a_n^2-3}{2a_n-4}$ wohldefiniert. Wegen $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ (nach (IV)) folgt weiter $a_n^2 - 3 \leqslant -2 < 0$, also ist $a_{n+1} = \frac{a_n^2-3}{2a_n-4} > 0$ als Quotient negativer Zahlen. Da $2a_n - 4 < 0$ gilt, ist

$$a_{n+1} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_n^2-3}{2a_n-4} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_n^2 - 3 \geqslant 2a_n - 4 \quad \Leftrightarrow \quad a_n^2 - 2a_n + 1 \geqslant 0.$$

Dies ist wegen $a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2$ nach I(3.7) eine wahre Aussage, also folgt $a_{n+1} \leqslant 1$. Damit ist die Aussage für $n + 1$ gezeigt. Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.
(2) Behauptung: $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist monoton steigend.
Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n^2-3}{2a_n-4} - a_n = \frac{a_n^2 - 3 - (2a_n^2 - 4a_n)}{2a_n - 4} = \frac{-a_n^2 + 4a_n - 3}{2a_n - 4} = \frac{a_n^2 - 4a_n + 3}{4 - 2a_n} \\ &= \frac{(a_n-3)(a_n-1)}{4-2a_n}. \end{aligned}$$

Wegen $a_n \leqslant 1$ ist $a_n - 3 \leqslant 0$ und $a_n - 1 \leqslant 0$, also ist $(a_n - 3)(a_n - 1) \geqslant 0$. Da nach (1) außerdem $4 - 2a_n > 0$ gilt, ist insgesamt $a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n-3)(a_n-1)}{4-2a_n} \geqslant 0$. Damit folgt die Behauptung.
Aus (1) und (2) folgt mit III(2.2), dass $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent ist. Sei a der Grenzwert von $(a_n)_{n\geqslant 1}$. Da $(a_{n+1})_{n\geqslant 1}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist, gilt nach III(1.14)

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2-3}{2a_n-4} \overset{\text{III}(1.7)}{=} \frac{a^2-3}{2a-4}.$$

Es folgt

$$2a^2 - 4a = a^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 4a + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (a-1)(a-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \text{ oder } a = 3.$$

Da $a_n \leqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, muss nach III(2.1) auch $a \leqslant 1$ gelten. Daher kann 3 nicht der Grenzwert von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sein, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ folgt.

Aufgabe 4
Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine reelle Folge mit $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass $(a_n)_{n\geqslant 1}$ höchstens zwei verschiedene Häufungspunkte besitzt.

Nach Voraussetzung ist $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $(|a_n|)_{n\geqslant 1}$ monoton fallend und daher

durch $|a_1|$ nach oben beschränkt. Zudem ist $(|a_n|)_{n\geqslant 1}$ durch 0 nach unten beschränkt. Nach III(2.2) besitzt $(|a_n|)_{n\geqslant 1}$ daher einen Grenzwert a. Wegen $|a_n| = \pm a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Folge $(b_n)_{n\geqslant 1}$ mit Werten in $\{-1; 1\}$, für die $|a_n| = a_n b_n$ und damit $a_n = \frac{|a_n|}{b_n} = |a_n| b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
1. Fall: Es gibt nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n = -1$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n = 1$ für alle $n \geqslant n_0$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es aufgrund der Konvergenz von $(|a_n|)_{n\geqslant 1}$ gegen a ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\big||a_n| - a\big| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_1$. Setze $N = \max\{n_0; n_1\}$. Für $n \geqslant N$ gilt dann $|a_n - a| = \big||a_n|b_n - a\big| = \big||a_n| - a\big| < \varepsilon$, also ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent gegen a und besitzt somit nach III(1.16) nur einen Häufungspunkt.
2. Fall: Es gibt nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n = 1$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n = -1$ für alle $n \geqslant n_0$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es aufgrund der Konvergenz von $(|a_n|)_{n\geqslant 1}$ gegen a ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\big||a_n| - a\big| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_1$. Setze $N = \max\{n_0; n_1\}$. Für $n \geqslant N$ gilt dann $|a_n - (-a)| = \big||a_n|b_n + a\big| = \big| - |a_n| + a\big| = \big||a_n| - a\big| < \varepsilon$, also ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent gegen $-a$ und besitzt somit nach III(1.16) nur einen Häufungspunkt.
3. Fall: Es gibt sowohl unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n = 1$ als auch unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n = -1$. Dann seien $(n_k)_{k\geqslant 1}$ und $(m_k)_{k\geqslant 1}$ die streng monoton steigenden Indexfolgen, für die ein $n \in \mathbb{N}$ genau dann in der Wertemenge von $(n_k)_{k\geqslant 1}$ liegt, wenn $b_n = 1$ ist und genau dann in der Wertemenge von $(m_k)_{k\geqslant 1}$ liegt, wenn $b_n = -1$ ist. Dann gilt $a_{n_k} = |a_{n_k}|b_{n_k} = |a_{n_k}|$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also ist $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ als Teilfolge von $(|a_n|)_{n\geqslant 1}$ nach III(1.14) konvergent gegen a. Weiter gilt $a_{m_k} = |a_{m_k}|b_{m_k} = -|a_{m_k}|$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also ist $(a_{m_k})_{k\geqslant 1} = (-|a_{m_k}|)_{k\geqslant 1}$ wegen der Konvergenz von $(|a_n|)_{n\geqslant 1}$ gegen a nach III(1.14) und den Limitenregeln konvergent gegen $-a$. Da jedes $n \in \mathbb{N}$ entweder von der Form n_k oder m_k für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, folgt genau wie in Aufgabe 2, dass a und $-a$ die einzigen Häufungspunkte von $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sind.
Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 5
Sei $M = \{2n + \frac{x}{|x|+1} \mid n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\}$. Man bestimme die Häufungspunkte, die inneren und die isolierten Punkte von M und untersuche M auf Offenheit und Abgeschlossenheit.

Bestimme zunächst $M_1 := \{\frac{x}{|x|+1} \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Sei $y \in M_1$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = \frac{x}{|x|+1}$. Für $x < 0$ ist

$$0 \geqslant \frac{x}{|x|+1} = y = \frac{-|x|}{|x|+1} = -1 + \frac{1}{|x|+1} > -1$$

und für $x \geqslant 0$ ist

$$0 \leqslant \frac{x}{|x|+1} = y = \frac{|x|}{|x|+1} = 1 - \frac{1}{|x|+1} < 1,$$

also gilt $y \in (-1; 1)$ und damit insgesamt $M_1 \subset (-1; 1)$.
Sei nun $y \in (-1; 1)$. Ist $y \geqslant 0$, so gilt

$$y = \tfrac{x}{|x|+1} \quad \Leftrightarrow \quad |x|y + y = x \quad \Leftarrow \quad xy + y = x \ \wedge \ x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy - x = -y \ \wedge \ x \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x(y-1) = -y \ \wedge \ x \geqslant 0 \quad \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} \quad x = -\tfrac{y}{y-1} \ \wedge \ x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{y}{1-y} \ \wedge \ x \geqslant 0.$$

Wählt man $x = \frac{y}{1-y}$, dann ist $x \geqslant 0$ wegen $0 \leqslant y < 1$, so dass wie gerade gezeigt $y = \frac{x}{|x|+1} \in M_1$

folgt. Ist $y < 0$, so gilt

$$y = \tfrac{x}{|x|+1} \quad\Leftrightarrow\quad |x|y + y = x \quad\Leftarrow\quad -xy + y = x \ \wedge\ x < 0 \quad\Leftrightarrow\quad -xy - x = -y \ \wedge\ x < 0$$
$$\Leftrightarrow\quad x(-y-1) = -y \ \wedge\ x < 0 \quad\overset{y\neq -1}{\Leftrightarrow}\quad x = -\tfrac{y}{-y-1} \ \wedge\ x < 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \tfrac{y}{y-1} \ \wedge\ x < 0.$$

Wähle $x = \frac{y}{y-1}$, dann ist $x < 0$ wegen $-1 < y < 0$, so dass wie gerade gezeigt $y = \frac{x}{|x|+1} \in M_1$ folgt. Damit wurde $(-1;1) \subset M_1$ gezeigt, zusammen mit $M_1 \subset (-1;1)$ folgt dann $M_1 = (-1;1)$. Damit lässt sich M darstellen als

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 2n + \frac{x}{|x|+1} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (2n-1; 2n+1),$$

also ist M als Vereinigung offener Mengen offen, womit M auch die Menge der inneren Punkte von M ist. Die Menge enthält daher keine isolierten Punkte.
Da jeder innere Punkt von M nach Definition auch ein Häufungspunkt von M ist, gilt $M \subset M'$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, dann ist $(2n - 1 + \frac{1}{m})_{m\geqslant 1}$ eine Folge in $M \setminus \{2n-1\}$ mit Grenzwert $2n-1$ (nach III(1.5) und III(1.7)), also ist auch $2n - 1 \in M'$ und damit $[1;\infty) \subset M'$. Sei nun $x \in \mathbb{R}$, $x < 1$. Wähle $\varepsilon = 1 - x > 0$, dann gilt $U_\varepsilon(x) = (x - (1-x); x + (1-x)) = (2x-1; 1)$, und es gilt $U_\varepsilon(x) \cap (M \setminus \{x\}) = \emptyset$, da alle Elemente von M größer als $2 \cdot 1 - 1 = 1$ sind. Damit ist x kein Häufungspunkt von M, so dass insgesamt $M' = [1;\infty)$ folgt. Wegen $M' \not\subset M$ (da $1 \in M'$, aber $1 \notin M$) ist M nicht abgeschlossen.

Aufgabe 6
Sei $M \subset \mathbb{R}$ sowohl offen als auch abgeschlossen. Man zeige, dass $M = \emptyset$ oder $M = \mathbb{R}$ gilt.

Sei $M \neq \emptyset$ und $M \neq \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $x_1 \in M$ und ein $x_2 \in M^C$.
1. Fall: $x_1 < x_2$. Definiere $N = M \cap (-\infty; x_2]$, dann ist N durch x_2 nach oben beschränkt und nichtleer (wegen $x_1 \in N$) und besitzt damit aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ein Supremum S. Zudem ist N als Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen (III(3.11) und III(3.12)), also gilt $S = \max N \in N$ nach III(3.13). Andererseits lässt sich N wegen $x_2 \notin M$ auch als $M \cap (-\infty; x_2)$ schreiben, ist also als Durchschnitt zweier offener Mengen offen (III(3.6) und III(3.7)). Demnach ist $S \in N$ ein innerer Punkt von N, also gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $(S - \varepsilon; S + \varepsilon) \subset N$ gilt. Dann ist auch $S + \frac{\varepsilon}{2} \in N$, was wegen $S + \frac{\varepsilon}{2} > S$ ein Widerspruch zu $S = \sup N = \max N$ ist.
2. Fall: $x_2 > x_1$. Da M^C nach III(3.10) ebenfalls offen und abgeschlossen ist und $x_2 \in M^C$, $x_1 \in M = (M^C)^C$ gilt, erhält man wörtlich den Widerspruch aus dem ersten Fall für M^C anstelle von M.
Da alle möglichen Fälle zu einem Widerspruch führen, muss entweder $M = \emptyset$ oder $M = \mathbb{R}$ gelten.

Aufgabe 7
Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(e - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right)$

Nach III(2.7) ist $((1 + \frac{1}{k})^k)_{k\geqslant 1}$ eine monoton steigende Folge, also ist $(e - (1 + \frac{1}{k})^k)_{k\geqslant 1}$ eine monoton fallende Folge. Da $((1+\frac{1}{k})^k)_{k\geqslant 1}$ nach III(2.7) gegen e konvergiert, ist $(e-(1+\frac{1}{k})^k)_{k\geqslant 1}$ nach den Limitenregeln (III(1.7)) eine Nullfolge. Nach dem Leibniz-Kriterium (IV(1.10)) folgt nun die Konvergenz der gegebenen Reihe.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2+(-1)^k)\frac{1}{k}$

Annahme: Die Reihe konvergiert. Da $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent ist ($(\frac{1}{k})_{k\geqslant 1}$ ist nach III(1.5) eine Nullfolge und klarerweise monoton fallend), ist nach IV(1.6) auch die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left((-2)\frac{(-1)^k}{k}+(-1)^k(2+(-1)^k)\frac{1}{k}\right)$ konvergent. Wegen

$$(-2)\frac{(-1)^k}{k}+(-1)^k(2+(-1)^k)\frac{1}{k}=(-2)\frac{(-1)^k}{k}+\frac{2(-1)^k}{k}+\frac{1}{k}=\frac{1}{k}$$

hat man dann einen Widerspruch zur Divergenz der harmonischen Reihe (IV(1.6)). Damit muss die gegebene Reihe divergent sein.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2}$

Für $k\in\mathbb{N}$ gilt $1\leqslant 2k-1$, also gilt aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion $\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2}\geqslant\frac{\sqrt{k^2-2k+1}}{k^2}=\frac{k-1}{k^2}$, für $k\geqslant 2$ ist $k-1\geqslant k-\frac{k}{2}=\frac{k}{2}$ und damit $\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2}\geqslant\frac{k-1}{k^2}\geqslant\frac{k}{2k^2}=\frac{1}{2k}$. Da die harmonische Reihe nach IV(1.6) divergiert, ist auch die gegebene Reihe nach dem Minorantenkriterium divergent.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ mit $a_k=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{falls ein } m\in\mathbb{N} \text{ mit } k=m^4 \text{ existiert,}\\ \frac{1}{k^2} & \text{sonst.}\end{cases}$

Sei $n\in\mathbb{N}$. Da alle a_k positiv sind und $n^4\geqslant n$ gilt, ist

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant\sum_{k=1}^{n^4}a_k=\sum_{\substack{k\in\mathbb{N},1\leqslant k\leqslant n^4\\ \forall\, m\in\mathbb{N}:m^4\neq k}}a_k+\sum_{m=1}^{n}a_{m^4}=\sum_{\substack{k\in\mathbb{N},1\leqslant k\leqslant n^4\\ \forall\, m\in\mathbb{N}:m^4\neq k}}\frac{1}{k^2}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{m^4}}\leqslant\sum_{k=1}^{n^4}\frac{1}{k^2}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}.$$

Da nach IV(1.3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k}$ konvergent ist, konvergiert auch $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ nach dem Majorantenkriterium, da für $k\geqslant 2$ gilt: $\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{(k-1)k}$. Damit lässt sich weiter abschätzen:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant\sum_{k=1}^{n^4}\frac{1}{k^2}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}<\infty,$$

und da alle a_k positiv sind, ist die Reihe nach IV(1.9) konvergent.

Aufgabe 8
Man berechne jeweils den Wert der Reihe.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{k}{2}}}{2^k}$

(1) Eine Reihe der Form

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0,\\ \exists\, m\in\mathbb{N}_0: k=4m+s}} \frac{(-1)^{\binom{k}{2}}}{2^k}$$

für $s \in \{0;1;2;3\}$ ist nach dem Majorantenkriterium (IV(2.4)) konvergent, da im Fall $k = 4m+s$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\left|\frac{(-1)^{\binom{k}{2}}}{2^k}\right| = \frac{1}{2^k}$$

und im Fall $k \neq 4m+s$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $0 \leqslant \frac{1}{2^k}$, also die geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ nach IV(1.4) eine konvergente Majorante der obigen Reihe ist.
(2) Ist $k = 4m$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$, so ist $\binom{k}{2} = \frac{4m(4m-1)}{2} = 2m(4m-1)$ gerade. Ist $k = 4m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$, so ist $\binom{k}{2} = \frac{(4m+1)(4m)}{2} = (4m+1)\cdot 2m$ gerade. Ist $k = 4m+2$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$, so ist $\binom{k}{2} = \frac{(4m+2)(4m+1)}{2} = (2m+1)(4m+1)$ als Produkt ungerader Zahlen ungerade. Ist $k = 4m+3$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$, so ist $\binom{k}{2} = \frac{(4m+3)(4m+2)}{2} = (4m+3)(2m+1)$ ebenfalls als Produkt ungerader Zahlen ungerade.
Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{k}{2}}}{2^k} \underset{\text{IV(1.6)}}{\overset{(1)}{=}} & \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0,\\ \exists\, m\in\mathbb{N}_0: k=4m}} \frac{(-1)^{\binom{k}{2}}}{2^k} + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0,\\ \exists\, m\in\mathbb{N}_0: k=4m+1}} \frac{(-1)^{\binom{k}{2}}}{2^k} \\
& + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0,\\ \exists\, m\in\mathbb{N}_0: k=4m+2}} \frac{(-1)^{\binom{k}{2}}}{2^k} + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0,\\ \exists\, m\in\mathbb{N}_0: k=4m+3}} \frac{(-1)^{\binom{k}{2}}}{2^k} \\
= & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{4m}{2}}}{2^{4m}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{4m+1}{2}}}{2^{4m+1}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{4m+2}{2}}}{2^{4m+2}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{4m+3}{2}}}{2^{4m+3}} \\
\underset{\text{IV(1.6)}}{\overset{(2)}{=}} & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4m}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4m+1}} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4m+2}} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4m+3}}.
\end{aligned}$$

Da die Reihe $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4m}} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^m$ nach IV(1.4) gegen $\frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15}$ konvergiert, erhält man für $s \in \{0;1;2;3\}$ nach IV(1.6)

$$\frac{1}{2^s}\cdot\frac{16}{15} = \frac{1}{2^s}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4m}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4m+s}}.$$

Setzt man dieses oben ein, erhält man

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{k}{2}}}{2^k} = \frac{1}{2^0} \cdot \frac{16}{15} + \frac{1}{2^1} \cdot \frac{16}{15} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{16}{15} - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{16}{15} = \frac{6}{5}.$$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ (Hinweis: Teleskopsumme)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Da $(\frac{1}{(n+1)!})_{n\geqslant 0}$ eine Teilfolge von $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ ist, gilt nach III(1.5), III(1.7) und III(1.14)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1 - 0 = 1.$$

Aufgabe 9
Sei $(a_k)_{k\geqslant 0}$ eine komplexe Folge.

a) Man zeige: Ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$ konvergent.

Sei $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. Dann ist $(a_k)_{k\geqslant 0}$ nach IV(1.7) eine Nullfolge, also gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_k| < \varepsilon$ für alle $k \geqslant k_0$ gilt. Für $k \geqslant k_0$ ist dann $|a_k^2| = |a_k|^2 \leqslant |a_k|$ wegen $|a_k| < 1$, also ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Majorante von $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$, womit $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$ nach dem Majorantenkriterium (IV(2.4)) absolut konvergent ist und daher nach IV(2.3) konvergiert.

b) Man gebe ein Beispiel für eine konvergente Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ an, für die $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$ nicht konvergiert.

Wähle $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ für $k \in \mathbb{N}_0$, dann ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nach dem Leibniz-Kriterium (IV(1.10)) konvergent, da $(\frac{1}{\sqrt{k+1}})_{k\geqslant 0}$ nach III(1.5) gegen 0 konvergiert und $(\frac{1}{\sqrt{k+1}})_{k\geqslant 0}$ aufgrund der Monotonie der Wurzel monoton fallend ist. Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ ist aber als harmonische Reihe nach IV(1.5) divergent.

Aufgabe 10
Sei $(a_k)_{k\geqslant 0}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen und $(n_k)_{k\geqslant 0}$ eine streng monoton steigende Indexfolge. Man zeige:

a) Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)a_{n_{k+1}}$ konvergent.

Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und $m \in \mathbb{N}_0$. Da $(a_k)_{k\geqslant 0}$ monoton fallend ist und $a_k \geqslant 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, ist

$$\sum_{k=0}^{m}(n_{k+1}-n_k)a_{n_{k+1}} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_{n_{k+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j = \sum_{k=n_0+1}^{n_{m+1}} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty,$$

also ist die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{m}(n_{k+1}-n_k)a_{n_{k+1}}\right)_{m\geqslant 0}$ der Partialsummen durch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ nach oben beschränkt. Zudem gilt $(n_{k+1}-n_k)a_{n_{k+1}} \geqslant 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, da $n_{k+1}-n_k \geqslant 0$ ($(n_k)_{k\geqslant 0}$ streng monoton steigend) und $a_{n_{k+1}} \geqslant 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist. Damit ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{m}(n_{k+1}-n_k)a_{n_{k+1}}$ nach IV(1.9) konvergent.

b) Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)a_{n_k}$ konvergent, so ist auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)a_{n_k}$ konvergent und $m \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n_m} a_k$, da $a_k \geqslant 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt und aufgrund der strengen Monotonie von $(n_k)_{k\geqslant 0}$ immer $n_k \geqslant k$ gelten muss. Aufgrund der Montonie von $(a_k)_{k\geqslant 1}$ gilt weiter

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n_m} a_k &= \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n_m} a_k = \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_{n_k}\\ &= \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{k=0}^{m-1}(n_{k+1}-n_k)a_{n_k} \overset{\text{wie in a)}}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{k=0}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)a_{n_k} < \infty.\end{aligned}$$

Damit ist $\left(\sum\limits_{k=0}^{m} a_k\right)_{m\geqslant 0}$ durch $\sum\limits_{k=0}^{n_0} a_k + \sum\limits_{k=0}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)a_{n_k}$ nach oben beschränkt. Da zudem $a_k \geqslant 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ nach IV(1.9) konvergent.

Aufgabe 11
Man bestimme die Konvergenzradien der gegebenen Potenzreihen.

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(3^k+3^{-k})z^k$

Nach Übung 5 konvergiert $(\sqrt[k]{|3^k + 3^{-k}|})_{k\geqslant 0} = (\sqrt[k]{3^k + (3^{-1})^k})_{k\geqslant 0}$ gegen $\max\{3; 3^{-1}\} = 3$. Nach III(2.12) ist 3 dann auch der Limes superior der Folge $(\sqrt[k]{|3^k + 3^{-k}|})_{k\geqslant 0}$, also folgt mit Cauchy-Hadamard (IV(4.8)), dass der Konvergenzradius der Reihe gleich $\frac{1}{3}$ ist.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1 + (-1)^k)z^k$

Setze $a_k = 1 + (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$ und sei $(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|})_{k\geqslant 0}$ eine beliebige konvergente Teilfolge von $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\geqslant 0}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \leqslant \sqrt[n_k]{2}$ aufgrund der Monotonie der n_k-ten Wurzel und wegen $a_{n_k} = 1 + (-1)^{n_k} \leqslant 2$. Nach III(2.1) ist damit der Grenzwert von $(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|})_{k\geqslant 0}$ höchstens so groß wie der Grenzwert von $(\sqrt[n_k]{2})_{k\geqslant 0}$. Letzterer Grenzwert ist nach III(1.14) gleich 1, da $(\sqrt[n_k]{2})_{k\geqslant 0}$ eine Teilfolge von $(\sqrt[k]{2})_{k\geqslant 0}$ ist und diese Folge nach Übung 5 gegen 1 konvergiert. Demnach sind alle Häufungspunkte von $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\geqslant 0}$ höchstens gleich 1. Da $(\sqrt[2k]{1 + (-1)^{2k}})_{k\geqslant 0} = (\sqrt[2k]{2})_{k\geqslant 0}$ eine Teilfolge von $(\sqrt[k]{2})_{k\geqslant 0}$ ist und diese Folge nach Übung 5 gegen 1 konvergiert, ist 1 nach III(1.14) auch der Grenzwert von $(\sqrt[2k]{1 + (-1)^{2k}})_{k\geqslant 0}$ und damit ist 1 ein Häufungspunkt von $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\geqslant 0}$. Zusammen mit dem vorher Gezeigten folgt, dass 1 der Limes superior von $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\geqslant 0}$ ist, also ist nach Cauchy-Hadamard (IV(4.8)) der Konvergenzradius der gegebenen Reihe gleich 1.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3k}{k}z^{2k}$

Setze $a_k = \binom{3k}{k}z^{2k} = \frac{(3k)!}{k!(2k)!}z^{2k}$, dann gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(3k+3)!}{(k+1)!(2k+2)!}\cdot|z|^{2k+2}\cdot\frac{k!(2k)!}{(3k)!}\cdot|z|^{-2k} = \frac{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}{(k+1)(2k+2)(2k+1)}|z|^2$$
$$= \frac{(3+\frac{3}{k})(3+\frac{2}{k})(3+\frac{1}{k})}{(1+\frac{1}{k})(2+\frac{2}{k})(2+\frac{1}{k})}|z|^2.$$

Nach III(1.5) und III(1.7) konvergiert dieser Ausdruck für $k \to \infty$ gegen $\frac{27}{4}|z|^2$. Mit IV(2.6) folgt, dass die die gegebene Reihe für $\frac{27}{4}|z|^2 < 1$ absolut konvergent und für $\frac{27}{4}|z|^2 > 1$ nicht absolut konvergent ist. Damit folgt absolute Konvergenz für $|z| < \frac{2}{\sqrt{27}}$ und keine absolute Konvergenz für $|z| > \frac{2}{\sqrt{27}}$, also ist nach IV(4.5) der Konvergenzradius der gegebenen Reihe gleich $\frac{2}{\sqrt{27}}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}2^k z^{k!}$

Für $z = 1$ ist die Folge $(2^k z^{k!})_{k\geqslant 0} = (2^k)_{k\geqslant 0}$ nach III(2.14) keine Nullfolge. Nach IV(1.7) kann die Reihe daher für $z = 1$ nicht konvergieren.
Sei nun $|z| < 1$. Setze $a_k = 2^k z^{k!}$. Für $k \geqslant 2$ gilt dann wegen $(k-1)! \geqslant k-1$

$$0 \leqslant \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{2^k|z|^{k(k-1)!}} = 2|z|^{(k-1)!} \overset{|z|<1}{\leqslant} 2|z|^{(k-1)} = \frac{2}{|z|}|z|^k.$$

Da $(|z|^k)_{k\geqslant 0}$ nach III(1.11) eine Nullfolge ist, konvergiert nach den Limitenregeln auch $(\frac{2}{|z|}|z|^k)_{k\geqslant 2}$ gegen 0, so dass mit dem Sandwich-Lemma die Konvergenz von $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\geqslant 1}$ gegen

0 folgt. Damit gibt es zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[k]{|a_k|} < \varepsilon$ für alle $k \geqslant k_0$ gilt. Mit dem Wurzelkriterium (IV(4.8)) folgt die absolute Konvergenz der Reihe.
Aus den gezeigten Tatsachen folgt mit IV(4.5), dass der Konvergenzradius der gegebenen Potenzreihe gleich 1 sein muss.

Aufgabe 12

Sei $(a_k)_{k\geqslant 0}$ eine komplexe Folge mit $0 < \limsup\limits_{k\to\infty} |a_k| < \infty$. Man zeige, dass die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ den Konvergenzradius 1 hat.

Der Limes superior von $(|a_k|)_{k\geqslant 0}$ sei mit S bezeichnet. Wegen $S \in \mathbb{R}$ ist $(|a_k|)_{k\geqslant 0}$ beschränkt, also gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_k| \leqslant C$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Da S das Supremum der Häufungspunktmenge von $(|a_k|)_{k\geqslant 0}$ ist, gibt es zu $\varepsilon = \frac{S}{3}$ einen Häufungspunkt a von $(|a_k|)_{k\geqslant 0}$ mit $\frac{2}{3}S = S - \varepsilon < a \leqslant S$. Sei nun $(|a_{n_k}|)_{k\geqslant 0}$ eine gegen a konvergente Teilfolge von $(|a_k|)_{k\geqslant 0}$. Zu $\varepsilon = \frac{S}{3}$ gibt es dann ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass $|a - a_{n_k}| < \varepsilon$ für alle $k \geqslant k_0$ gilt. Für $k \geqslant k_0$ folgt dann weiter mit der zweiten Dreiecksungleichung

$$|a| - |a_{n_k}| < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad |a_{n_k}| - a > -\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad |a_{n_k}| > a - \varepsilon > \frac{2}{3}S - \frac{S}{3} = \frac{S}{3},$$

so dass sich mit der Monotonie der n_k-ten Wurzel

$$\sqrt[n_k]{\frac{S}{3}} \leqslant \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \leqslant \sqrt[n_k]{C}$$

ergibt. Da $\sqrt[n]{x}$ für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ nach Übung 5 gegen 1 konvergiert, sind auch $\left(\sqrt[n_k]{\frac{S}{3}}\right)_{k\geqslant 1}$ und $(\sqrt[n_k]{C})_{k\geqslant 1}$ nach III(1.14) als Teilfolgen konvergent gegen 1, so dass mit dem Sandwich-Lemma folgt, dass $(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|})_{k\geqslant 1}$ gegen 1 konvergiert. Nach Definition des Limes superior muss daher $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \geqslant 1$ gelten.
Sei nun $(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|})_{k\geqslant 1}$ eine beliebige konvergente Teilfolge von $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\geqslant 1}$, dann folgt mit III(2.1) nach obiger Abschätzung

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \leqslant \lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{C} = 1,$$

also ist jeder Häufungspunkt von $(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|})_{k\geqslant 1}$ kleiner oder gleich 1. Zusammen mit der oben gezeigten Abschätzung des Limes superiors von $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k\geqslant 1}$ folgt dann, dass dieser gleich 1 sein muss, also ist nach Cauchy-Hadamard (IV(4.8)) der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich 1.